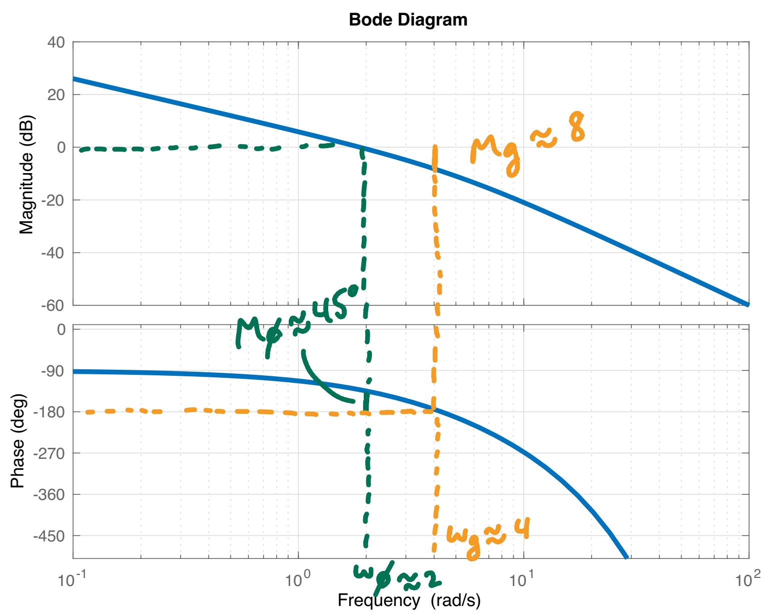
Solución

ELO270 – S2 2021 – Certamen C2

Problema 2.1 (10 puntos) *La figura muestra el diagrama de Bode de una transferencia de lazo abierto $G_o(s)C(s)$ sin cancelaciones ni polos en el semiplano derecho abierto.*

(a) ¿Es el lazo cerrado internamente estable?

(b) ¿En cuánto debe aumentarse o reducirse el retardo en $G_o(s)C(s)$ para que aparezca una oscilación sostenida en el lazo cerrado?



(a) Del diagrama de Bode se puede apreciar que

- Cuando $|G_oC|_{dB} = 0 \Rightarrow \measuredangle G_oC \approx -135° \Rightarrow M_\phi \approx 45°$ para $\omega_\phi \approx 2 \frac{rad}{s}$
- Cuando $\measuredangle G_oC = -180° \Rightarrow |G_oC|_{dB} \approx -8\ dB \Rightarrow M_g \approx 8\ dB$ para $\omega_g \approx 4 \frac{rad}{s}$

Dado que ambos márgenes son positivos, el Nyquist NO encierra al $(-1,0)$ $N=0$

Además se indica que $P=0$, por tanto $Z=N+P=0$

es decir el lazo es estable

(b) El retardo crítico se obtiene $(T_d)_{crítico} = \frac{M_\phi}{\omega_\phi} = \frac{\pi/4}{2} = \frac{\pi}{8} \approx 0.38\ [s]$

En este caso es el retardo crítico que puede agregarse a G_oC

ELO270 – S2 2021 – Certamen C2

Problema 2.2 (10 puntos) *Considere una planta con modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{b_o}{s^2}$$

Determine, si existe, un controlador PID de manera que todos los polos de lazo cerrado se ubiquen en $\alpha < 0$.

- La planta es de orden $n = 2$
- Se usa un controlador con integración (PID), por tanto, $r = 1$

$\Rightarrow$ Se pueden asignar arbitrariamente los polos de lazo cerrado si el controlador es de orden $n - 1 + r = 2$ es decir, el orden del PID: $C(s) = \dfrac{P(s)}{L(s)} = \dfrac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s + l_0)}$

- Para asignar los polos se resuelve la ecuación diofantina:

$$A_o L + B_o P = A_{cl}$$

$$\Rightarrow \quad s^2 s(s + l_0) + b_o(p_2 s^2 + p_1 s + p_0) = (s - \alpha)^4$$

$$s^4 + l_0 s^3 + b_o p_2 s^2 + b_o p_1 s + b_o p_0 = s^4 - 4\alpha s^3 + 6\alpha^2 s^2 - 4\alpha^3 s + \alpha^4$$

$\Rightarrow$ los parámetros son

$$l_0 = -4\alpha, \quad p_2 = \frac{6\alpha^2}{b_o}, \quad p_1 = \frac{-4\alpha^3}{b_o}, \quad p_0 = \frac{\alpha^4}{b_o}$$

ELO270 – S2 2021 – Certamen C2

Problema 2.~~4~~ 3 (10 puntos) *Considere un lazo de control estándar en que*

$$C(s) = C_{PI}(s) = \frac{p_1 s + p_o}{s} \qquad G_o(s) = \frac{1}{s}$$

y la actuación está limitada por $|u(t)| \leq U_{\text{máx}}$.

Determine qué condiciones sobre $\{p_1, p_o, U_{\text{máx}}\}$ *permiten garantizar que el lazo* ~~*permanece*~~ es *estable cuando se aplica una referencia escalón unitario con condiciones iniciales cero.*

- Para garantizar que el lazo permanece estable es suficiente asegurar que no se "activa" la saturación y que en dicha situación el lazo es estable.
- Para determinar si se activa la saturación, revisamos la actuación $u(0^+)$ cuando $r(t) = \mu(t)$

$$u(0^+) = \lim_{s \to \infty} s\,U(s) = \lim_{s \to \infty} s \frac{S_{uo}(s)}{s} = S_{uo}(\infty)$$

en que $S_{uo}(s) = \dfrac{C}{1+G_oC} = \dfrac{p_1 s + p_o}{s^2 + p_1 s + p_o} \Rightarrow S_{uo}(\infty) = p_1$

por tanto es suficiente que $S_{uo}(\infty) = p_1 \leq U_{max}$ (i)

- Para que el lazo sea estable revisamos el polinomio de lazo cerrado $A_{cl}(s) = s^2 + p_1 s + p_o$

el cual es estable $\iff \left.\begin{matrix} p_1 > 0 \\ p_o > 0 \end{matrix}\right\}$ (ii)

Por tanto, a partir de (i) y (ii), es suficiente que

$$0 < p_1 \leq U_{max}$$

y $$p_o > 0$$

ELO270 – S2 2021 – Certamen C2

Problema 2.~~5~~ 4 (10 puntos) *Considere el lazo de control estándar en que la planta es*

$$G_o(s) = \frac{s - mm}{s(s - dd)} e^{-T_d s}$$

en que $T_d \approx 0{,}15$ *y dd y mm son el día y mes de su cumpleaños. Se sabe además que la referencia a seguir tiene componentes en frecuencia en la banda de* 0 *a* 6 *[rad/s].*

(a) Indique claramente los criterios de diseño para el sistema de control que se derivan de la información disponible.

(b) Proponga un sistema de control que considere adecuadamente los criterios anteriores (indicando claramente cómo diseñaría cada bloque).

(a) La planta tiene un cero de fase no mínima, por tanto el ancho de banda debe ser MENOR que mm para reducir el undershoot ✓

El polo inestable de la planta hace que para reducir el overshoot el ancho de banda del lazo debe ser MAYOR que dd ✓

Para usar asignación de polos el retardo puede
- despreciarse en cuyo caso $Bw(T_o) < \frac{1}{0.15} \approx 6.5 \left[\frac{rad}{s}\right]$ o bien ✓
- aproximarse con Padé 1 $\Rightarrow Bw(T_o) < \frac{3}{0.15} = 20 \left[\frac{rad}{s}\right]$ ✓

Además, para buen seguimiento a referencia ✓ $Bw(T_o) \geq 6 \left[\frac{rad}{s}\right]$ ✓
e integración en el controlador. ✓

(b) • Para compatibilizar los requerimientos se observa que usando Padé 1er orden se puede elegir sin problema un $Bw(T_o)$ para buen seguimiento a referencia $6 < Bw(T_o) < 20$

• Si $dd \leq mm$ entonces se pueden satisfacer los criterios para reducir undershoot y overshoot

pero si $dd \geq mm$ entonces se debe elegir un Bw intermedio

• Se podría usar prealimentación para separar el requisito de ancho de banda de seguimiento a referencia

- elección de Bw del lazo coherente ✓
- diseño de C(s) ✓, elección del Ad ✓
- si se justifica, diseño de H_{ff} ✓

ELO270 – S2 2021 – Certamen C2

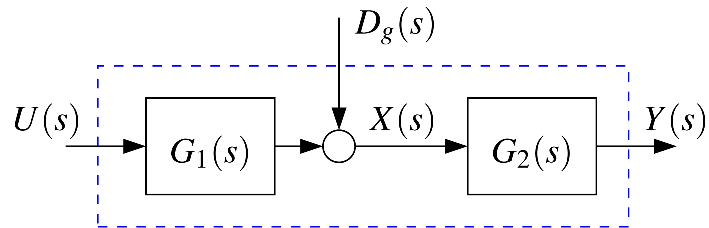
Problema 2.5 (10 puntos) *Considere un lazo de control estándar en que la planta está definida por los bloques que se muestra en la figura*

$$G_1(s) = \frac{1}{s} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s}$$

Se sabe que la referencia está en la banda de 0 a 5 [rad/s], mientras que la perturbación tiene energía concentrada en torno a 10 [rad/s] y es medible sin ruido apreciable. Por otro lado, el sensor disponible para medir y(t) es preciso hasta aproximadamente 10 [rad/s], mientras que el sensor para x(t) es preciso hasta aproximadamente 20 [rad/s].

(a) Indique claramente los criterios de diseño para el sistema de control que se derivan de la información disponible.

(b) Proponga un sistema de control que considere adecuadamente los criterios anteriores (indicando claramente cómo diseñaría cada bloque).



(a). La planta no impone requisitos de diseño particulares (sólo sabemos que habrá overshoot por los integradores)

- Para seguimiento a referencia debe haber integración en el controlador y $Bw(T_o) \geq 5$ [rad/s]
- Perturbación medible sin ruido ⇒ puede usarse prealimentación para $Bw \geq 10$ [rad/s]
- Pero, dado que $x(t)$ es medible con precisión hasta 20 [rad/s] puede usarse un lazo interno para compensar dicha perturbación: $10 \leq Bw_1 \leq 20$
- El lazo exterior puede elegirse con ancho de banda suficiente para seguir la referencia, pero dentro de la banda en que la medición es precisa: $5 \leq Bw_2 \leq 10$

ELO270 – S2 2021 – Certamen C2

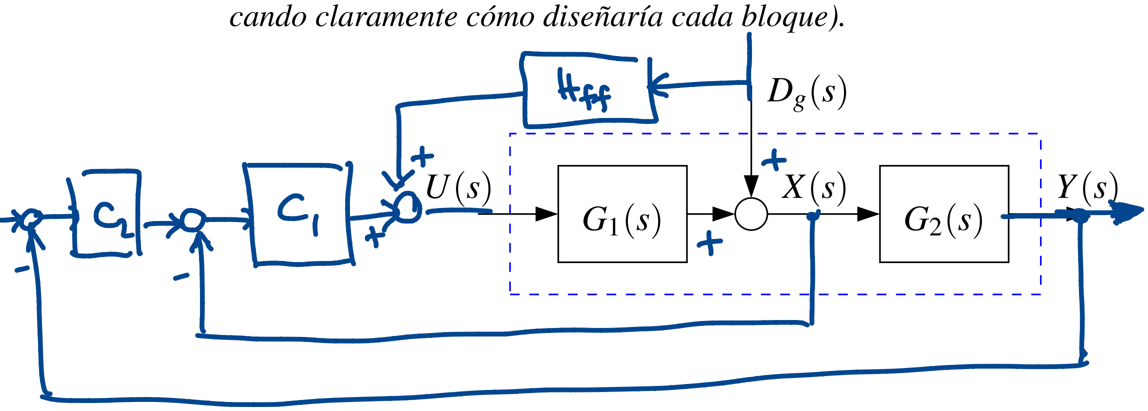
Problema 2.6 (10 puntos) *Considere un lazo de control estándar en que la planta está definida por los bloques que se muestra en la figura*

$$G_1(s) = \frac{1}{s} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s}$$

Se sabe que la referencia está en la banda de 0 a 5 [rad/s], mientras que la perturbación tiene energía concentrada en torno a 10 [rad/s] y es medible sin ruido apreciable. Por otro lado, el sensor disponible para medir y(t) es preciso hasta aproximadamente 10 [rad/s], mientras que el sensor para x(t) es preciso hasta aproximadamente 20 [rad/s].

(a) *Indique claramente los criterios de diseño para el sistema de control que se derivan de la información disponible.*

(b) *Proponga un sistema de control que considere adecuadamente los criterios anteriores (indicando claramente cómo diseñaría cada bloque).*



(b) H_{ff} | Idealmente $H_{ff} = -G_1^{-1} = -s$ pero debe ser estable y propio

$\Rightarrow$ Elegimos $H_{ff} = \frac{-s}{\tau s + 1}$ en que $\tau < 0.1$ para que compense $d_g(t)$ hasta $\omega > 10$

C_1 | Se diseña de tal forma que el lazo interno tenga
$Bw_1 \geq 10$ por la perturbación $d_g(t)$ y
$Bw_1 \leq 20$ por el sensor de $x(t)$

$G_1(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow C_1(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s} \Rightarrow A_{cl1} = A_{o1} \cdot L_1 + B_{o1} P_1$

$$s^2 + 2\xi_1 \omega_{n1} s + \omega_{n1}^2 = s^2 + p_1 s + p_0$$

con $\xi_1 \approx 0.7$
$\omega_{n1} = 15 \left[\frac{rad}{s}\right]$

ELO270 – S2 2021 – Certamen C2

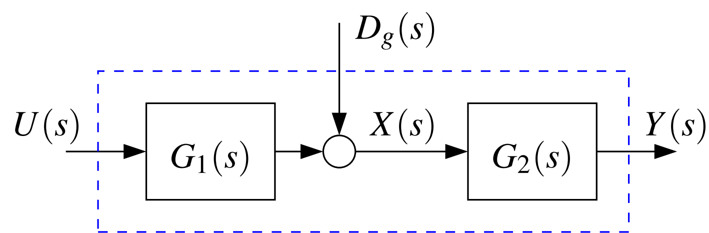
Problema 2.6 (10 puntos) *Considere un lazo de control estándar en que la planta está definida por los bloques que se muestra en la figura*

$$G_1(s) = \frac{1}{s} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s}$$

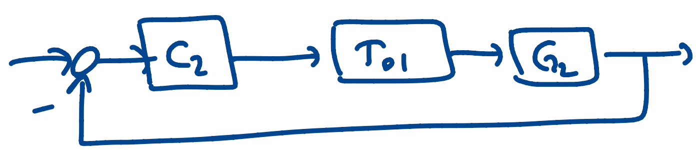
Se sabe que la referencia está en la banda de 0 a 5 [rad/s], mientras que la perturbación tiene energía concentrada en torno a 10 [rad/s] y es medible sin ruido apreciable. Por otro lado, el sensor disponible para medir y(t) es preciso hasta aproximadamente 10 [rad/s], mientras que el sensor para x(t) es preciso hasta aproximadamente 20 [rad/s].

(a) Indique claramente los criterios de diseño para el sistema de control que se derivan de la información disponible.

(b) Proponga un sistema de control que considere adecuadamente los criterios anteriores (indicando claramente cómo diseñaría cada bloque).



(b) C_2| Calculamos la "planta equivalente" para diseñar C_2



en que $T_{01} = \dfrac{p_1 s + p_0}{s^2 + p_1 s + p_0}$

El controlador C_2 se diseña de tal manera que el ancho de banda del lazo: $B_{w2} \geq 5$ por la referencia y

$B_{w2} \leq 10$ por el sensor de la salida $y(t)$

$$\tilde{G}_2 = T_{01} G_2 = \frac{p_1 s + p_0}{(s^2 + p_1 s + p_0) s} \Rightarrow C_2 = \frac{P_2}{L_2} = \frac{\tilde{p}_3 s^3 + \tilde{p}_2 s^2 + \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0}{s(s^2 + \ell_1 s + \ell_0)}$$

y $\underbrace{A_{cl2}}_{} = A_{o2} L_2 + B_{o2} P_2$

polos dominantes en $(s^2 + 2\xi_2 \omega_{n2} s + \omega_{n2}^2)$ con $\xi_2 \approx 0.7$ y $\omega_{n2} = 8$

← podrían forzarse cancelaciones estables con A_{o2}: es decir $P_2 = (s^2 + p_1 s + p_0)(\tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0)$