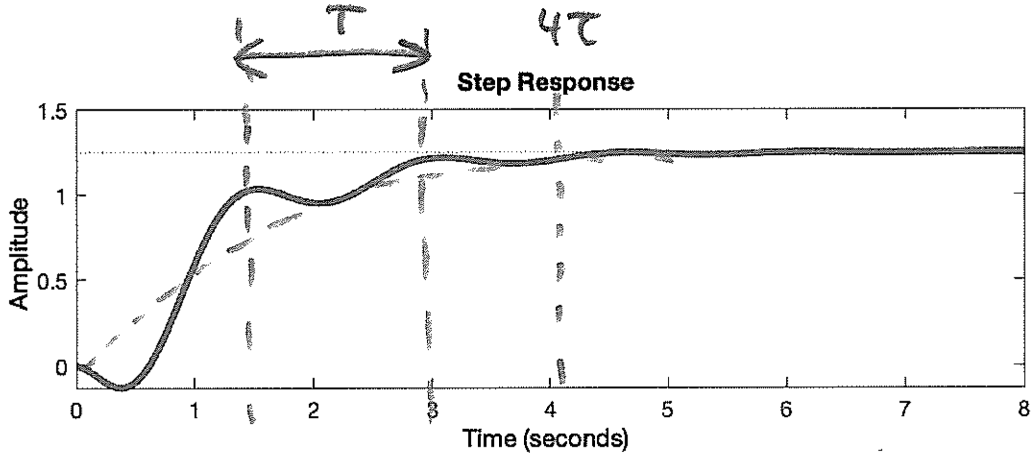
ELO270 – S2 2021 – Control C0

Problema 0.1 (4 puntos) *La figura muestra la respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo cuando la entrada es un escalón unitario y las condiciones iniciales son cero.*

(a) *Proponga una función de transferencia aproximada para el sistema, fundamentando claramente su respuesta.*



En la figura se aprecia que

- ganancia a continua $H(0) = 1.25$ ✓
- hay undershoot: cero de fase no mínima o "inestable", es decir, $(s-c)$ en el numerador en que $c > 0$
- En el transiente se observa una oscilación amortiguada sobre una exponencial, por tanto, hay un polo real negativo en $p_1 = -\frac{1}{\tau}$ en que $4\tau \approx 4$. $\boxed{\tau \approx 1}$

  y un par de polos complejos conjugados $(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$ en que $\omega_n \approx \frac{2\pi}{T}$ en que $T \approx 1.5 \approx \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_n \approx 4}$ ✓

  y ξ "pequeño"

$$\Rightarrow \quad H(s) = \frac{1.25(-s+c)}{c} \cdot \frac{1}{(\tau s + 1)} \cdot \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

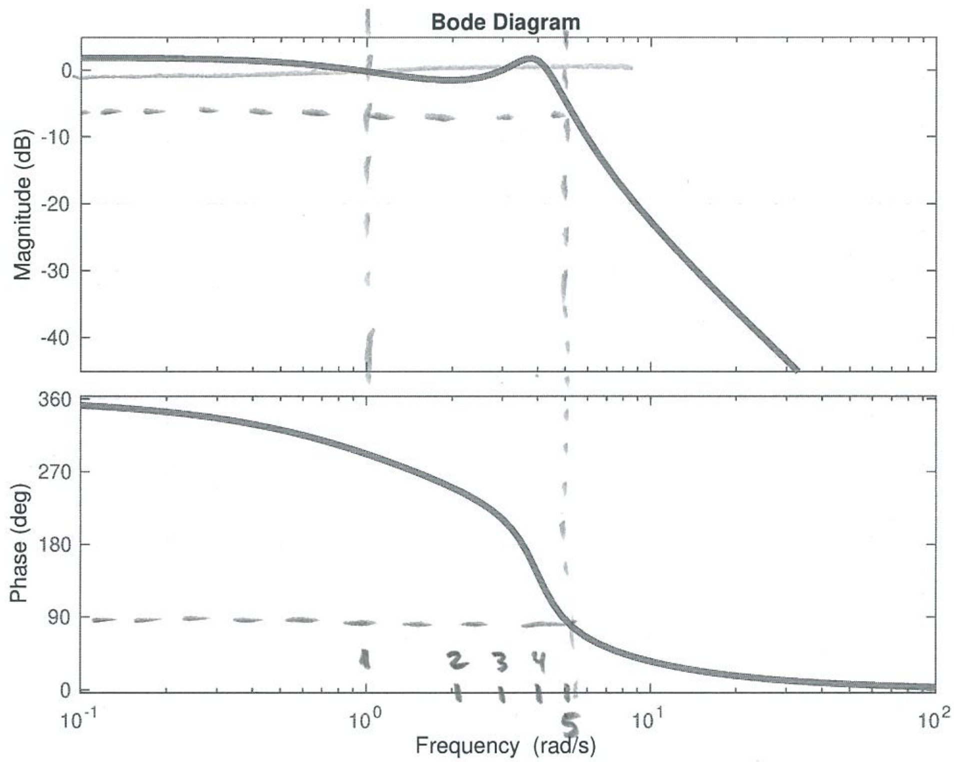
ELO270 – S2 2021 – Control C0

Problema 0.2 (4 puntos) *La figura muestra al diagrama de Bode de un sistema lineal e invariante en el tiempo*

(a) *Determine la respuesta estacionaria cuando la entrada es $u(t) = 2\cos(5t)$*

(b) *Estime el ancho de banda del sistema.*

~~(c) *Grafique (aproximadamente) el diagrama de Nyquist del sistema.*~~



$|H(j\omega)|_{dB}$

$\measuredangle H(j\omega)$

(a) Del Bode se puede observar que para $\omega = 5$:

$|H(j5)|_{dB} \approx -6$ dB $\Longleftrightarrow |H(j5)| = \frac{1}{2}$

$\measuredangle H(j5) \approx +90°$ (que equivale a $-270°$)

$\Rightarrow \quad y_{ee}(t) = \frac{1}{2} \cdot 2\cos(5t + 90°)$

(b) El ancho de banda puede considerarse en torno a 1 $\left[\frac{rad}{s}\right]$ pues es hasta donde $|H(j\omega)| \approx 1$ y $\measuredangle H(j\omega) \approx 0°$ (o $360°$)

Si se considera criterio de -3db puede indicarse $B_w \approx 4.5 \left[\frac{rad}{s}\right]$

ELO270 – S2 2021 – Control C0

Problema 0.3 (4 puntos) *Considere el sistema no lineal con entrada $u = u(t)$ y salida $y = y(t)$ definido por*

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (1-y^2)\frac{dy}{dt} + y = u$$

(a) Determine el o los puntos de operación en equilibrio determinados por $u(t) = u_Q$

(b) Determine si el sistema es localmente estable o inestable en dicho(s) punto(s).

(a) Punto de operación en equilibrio: consideramos las derivadas iguales a cero y la entrada $u(t) = u_Q$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_Q}}_{0} - (1-y_Q^2)\underbrace{\cancel{\left.\frac{dy}{dt}\right|_Q}}_{0} + y_Q = u_Q \Rightarrow \boxed{y_Q = u_Q}$$

un solo punto de operación en equilibrio (Q)

(b) Linealizamos en torno al punto Q:

$y(t) = y_Q + \Delta y(t)$

$u(t) = u_Q + \Delta u(t)$

Expansión en Taylor de 1er orden del lado izquierdo de la ecuación:

Metodología ok

$$f(y'', y', y) = y'' - (1-y^2)y' + y$$

$$\approx \underbrace{\cancel{(y'')_Q}}_{0} - (1-y_Q^2)\underbrace{\cancel{(y')_Q}}_{0} + y_Q$$

$$+ 1 \cdot \frac{d^2}{dt^2}\Delta y$$

$$+ (-(1-y_Q^2))\frac{d}{dt}\Delta y$$

$$+ \left[2y_Q \underbrace{\cancel{\left.\frac{dy}{dt}\right|_Q}}_{0} + 1\right]\Delta y$$

modelo linealizado

$$\Rightarrow \cancel{y_Q} + \frac{d^2}{dt^2}\Delta y + (y_Q^2-1)\frac{d}{dt}\Delta y + \Delta y = \cancel{u_Q} + \Delta u$$

ELO270 – S2 2021 – Control C0

Problema 0.3 (4 puntos) *Considere el sistema no lineal con entrada $u = u(t)$ y salida $y = y(t)$ definido por*

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (1-y^2)\frac{dy}{dt} + y = u$$

(a) Determine el o los puntos de operación en equilibrio determinados por $u(t) = u_Q$

(b) Determine si el sistema es localmente estable o inestable en dicho(s) punto(s).

(continuación)

pero en el punto Q: $y_Q = u_Q$

$\Rightarrow$ función transferencia del modelo linealizado es

$$\left.\frac{\mathcal{L}\{\Delta y\}}{\mathcal{L}\{\Delta u\}}\right|_{c.i.=0} = \frac{1}{s^2 + (y_Q^2 - 1)s + 1}$$

La estabilidad local depende de los polos, que dependen de y_Q ✓

Serán estables si la parte real es <u>negativa</u>.

Eso se logra si y sólo si $y_Q^2 - 1 > 0$

$\Leftrightarrow \quad |y_Q| > 1$

$\Leftrightarrow \quad |u_Q| > 1$