

ELO270 – S2 2022 – Certamen C1

Problema 1.1 (10 puntos) Dada la planta

$$G(s) = \frac{-100(s-2)e^{-0,05s}}{s^2 + 20s + 100}$$

- (a) Grafique aproximadamente la salida si la entrada es: $u(t) = \mu(t)$.
- (b) Determine aproximadamente la respuesta estacionaria del sistema cuando la entrada es: $u(t) = 7 \sin(10t)$.

Solución:

- (a) La planta se puede reescribir como:

$$G(s) = \frac{100(-s+2)e^{-0,05s}}{(s+10)^2}$$

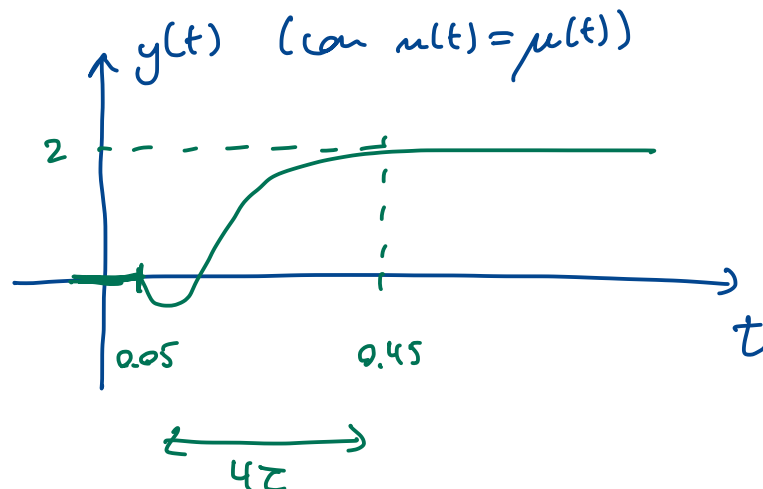
Se puede observar que el sistema tiene un cero de fase no mínima o un cero inestable en $c = 2$ el cual produce undershoot, tiene un polo real doble en $p = -10$, el cual produce un comportamiento amortiguado similar a un sistema de primer orden y finalmente se observa que tiene un retardo puro de tiempo en $T_d = 0,05$. Además si la entrada es un escalón unitario se puede obtener los siguientes valores:

$$Y(s) = \frac{100(-s+2)e^{-0,05s}}{(s+10)^2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y_{ee} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{100(-s+2)e^{-0,05s}}{(s+10)^2} = 2$$

$$y_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{100(-s+2)e^{-0,05s}}{(s+10)^2} = 0$$

Por tanto:



ELO270 – S2 2022 – Certamen C1

Problema 1.1 (10 puntos) Dada la planta

$$G(s) = \frac{-100(s-2)e^{-0,05s}}{s^2 + 20s + 100}$$

- (a) Grafique aproximadamente la salida si la entrada es: $u(t) = \mu(t)$.
- (b) Determine aproximadamente la respuesta estacionaria del sistema cuando la entrada es: $u(t) = 7 \sin(10t)$.

(b) La respuesta estacionaria del sistema cuando la entrada es: $u(t) = 7 \sin(10t)$ es:

$$y_{ee}(t) = 7|G(j10)| \sin(10t + \angle G(j10))$$

magu

$$|G(j10)| = \left| \frac{-100(j10 - 2)e^{-0.5j}}{-100 + 20 \cdot j10 + 100} \right|$$

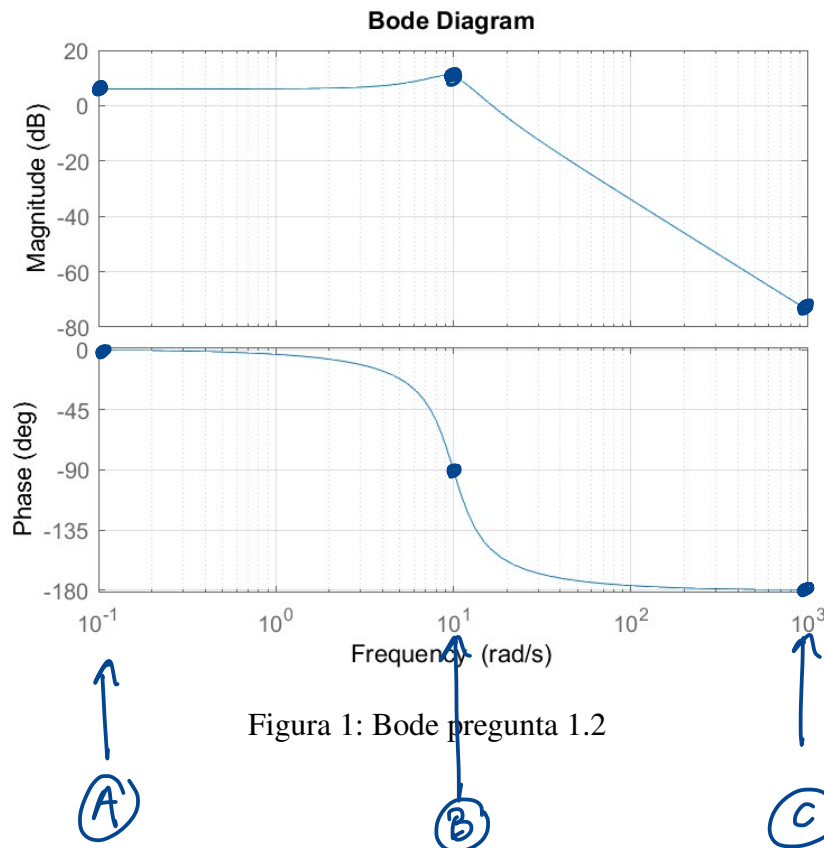
$$= \frac{100 \sqrt{100 + 4}}{200} \approx 5$$

$$\begin{aligned} \angle G(j10) &= \angle \left(\frac{+100(-j10 + 2)e^{-0.5j}}{-100 + 20 \cdot j10 + 100} \right) \\ &= \text{Ang} \left(-\frac{10}{2} \right) - 0.5 - \pi/2 \\ &= -1.37 - 0.5 - 1.57 \text{ [rad]} \\ &= -3.42 \text{ [rad]} = -196 \text{ [}^\circ\text{]} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_{ee}(t) = 35 \sin(10t - 196)$$

ELO270 – S2 2022 – Certamen C1

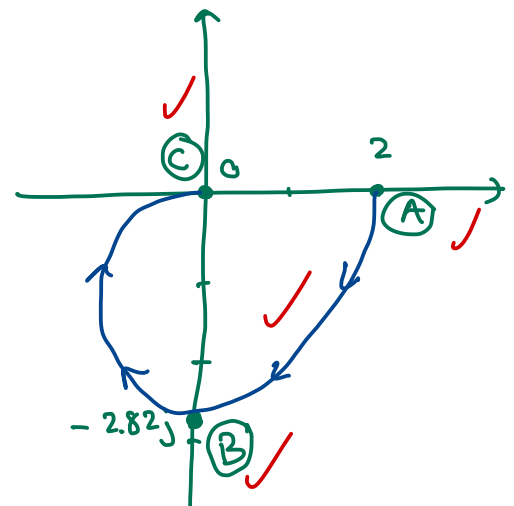
Problema 1.2 (10 puntos) Dado el diagrama de bode de la figura 1, determine aproximadamente el diagrama de Nyquist de la planta, fundamentando claramente su respuesta.



El Nyquist se puede graficar aproximadamente en base a las tres frecuencias indicadas en la figura

(A) $\omega \rightarrow 0$ $\left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)|_{dB} = 0 \Leftrightarrow |G(j\omega)| = 1 \\ \angle G(j\omega) \approx 0 \end{array} \right.$ ✓
 (B) $\omega \approx 10$ $\left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)|_{dB} \approx 0 \Leftrightarrow |G(j\omega)| = 1 \\ \angle G(j\omega) = -90^\circ \end{array} \right.$ ✓
 (C) $\omega \approx 1000$ $\left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| \approx -80 \Leftrightarrow |G(j\omega)| \approx 0 \\ \angle G(j\omega) \approx -180^\circ \end{array} \right.$ ✓

Por tanto:



ELO270 – S2 2022 – Certamen C1

Problema 1.3 (10 puntos) Considere el sistema no lineal con entrada $u = u(t)$ y salida $y = y(t)$ definido por:

$$\frac{dy}{dt} = -2\ln(y) + u + 1.$$

a) Determine el o los puntos de operación en equilibrio determinados por $u_Q = 1$.

b) Determine si el modelo linealizado en torno a el o los puntos de operación en equilibrio es estable o inestable.

a) Solución: Para determinar el o los puntos de operación en equilibrio se debe igualar la derivada a cero:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -2\ln(y) + u + 1 = 0 && \checkmark \\ 2\ln(y) &= u_Q + 1 && \checkmark \\ y_Q &= e \approx 2,7183 && \checkmark\end{aligned}$$

$u_Q = 1$

b) Como se puede observar existe solo un punto de operación. Para la linealización se aplica Taylor y se utilizan las variables de desviación:

$$\begin{aligned}u(t) &= u_Q + \Delta u(t) && \checkmark \\ y(t) &= y_Q + \Delta y(t)\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= -2\ln(y) + u + 1 \\ \frac{d\Delta y(t)}{dt} &= -2\frac{1}{y_Q}\Delta y(t) + \Delta u(t) && \checkmark\checkmark\checkmark \\ \frac{d\Delta y(t)}{dt} + 2\frac{1}{y_Q}\Delta y(t) &= \Delta u(t)\end{aligned}$$

$\ln(y) \approx \ln(y_Q) + \frac{1}{y_Q} \Delta y$

Aplicando transformada de Laplace, se obtiene la función de transferencia:

$$\Delta Y(s) = \frac{\Delta U(s)}{s + \frac{2}{y_Q}} \quad \checkmark\checkmark$$

Como y_Q es positivo el modelo linealizado en torno al punto de operación en equilibrio es estable ya que el polo está en el semiplano izquierdo abierto. ✓

ELO270 – S2 2022 – Certamen C1

Problema 1.4 (10 puntos) Diseñe, si es posible, un controlador en lazo abierto que garantice buen seguimiento para una señal de referencia de baja frecuencia.

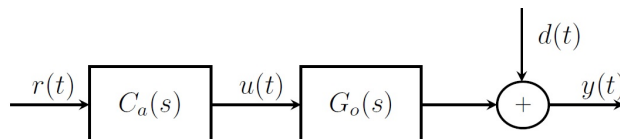


Figura 2: Bode pregunta 1.4

En los siguientes casos:

(a) $G_o(s) = \frac{5(s+3)}{(s^2+2s+1)}$.

(b) $G_o(s) = \frac{10}{(s^2-4s+5)}$.

Solución: En lazo abierto un controlador que garantice buen seguimiento para una señal de referencia de baja frecuencia se debe obtener invirtiendo la planta nominal, aunque esto en algunos casos es difícil de conseguir y se realiza una aproximación del inverso de la planta. ✓

(a) En este caso la planta tiene un cero estable el cual se puede invertir y tiene un polo doble en $p = -1$. Por lo que el controlador es: ✓✓

$$C_a(s) = \frac{(s+1)^2}{5(s+3)(\tau s+1)}$$

El término $(\tau s+1)$ se debe agregar para que el controlador sea realizable. El valor de τ debe ser pequeño para que el polo sea rápido y no afecte la dinámica del sistema. ✓✓

(b) En este caso la planta tiene un par de polos complejos conjugados en $p = 2 \pm j$, los cuales son inestables. Por esta razón en este caso no se pudo diseñar un controlador de lazo abierto porque la planta es inestable. ✓✓

ELO270 – S2 2022 – Certamen C1

Problema 1.5 (10 puntos) Dado el diagrama de bloque de la figura 3 obtenga la salida del controlador $U(s)$ en función de todas las señales de entrada al lazo de control.

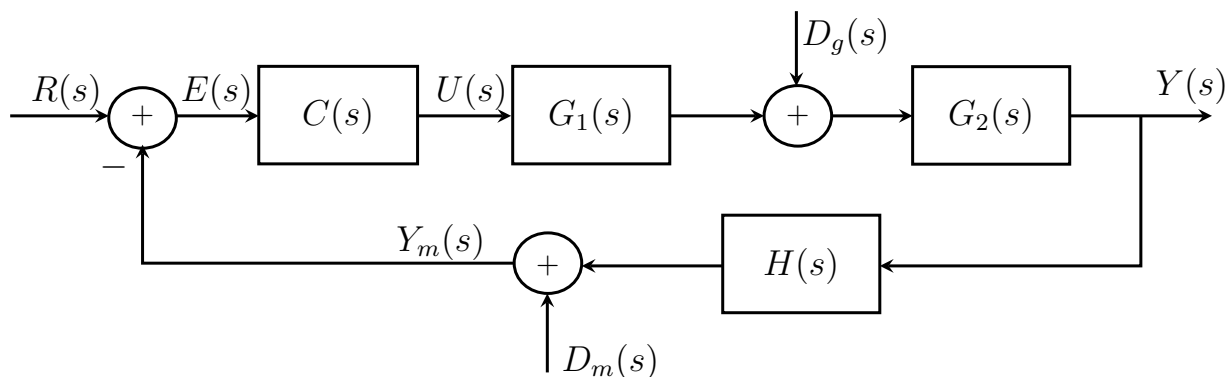


Figura 3: Diagrama problema 1.5

Solución: Aplicando superposición se tiene:

$$U_1(s) = \frac{-G_2(s)H(s)C(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)H(s)} D_g(s)$$

$$U_2(s) = \frac{-C(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)H(s)} D_m(s)$$

$$U_3(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s)$$

Finalmente:

$$U(s) = U_1(s) + U_2(s) + U_3(s) = \frac{-G_2(s)H(s)C(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)H(s)} D_g(s) + \frac{-C(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)H(s)} D_m(s) + \frac{C(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s) \quad (*)$$

Alternativamente se puede plantear ecuaciones:

$$U = C(R - Y_m)$$

$$Y_m = D_m + H Y$$

$$Y = G_2(D_g + G_1 U)$$

$$\Rightarrow U = C(R - D_m - H G_2(D_g + G_1 U))$$

$$(1 + C H G_2 G_1) U = C R - C D_m - C H G_2 D_g$$

$\Rightarrow$ mismo resultado que en (*)