

ELO270 – S2 2022 – Certamen C2

Problema 1.1 (10 puntos) Se tiene un lazo de control realimentado de un grado de libertad, donde la planta y el controlador están dados por:

$$G_o(s) = \frac{-s + 2}{s^2 + s + 1}$$

Determine:

- (a) Las cuatro funciones de sensibilidad.
- (b) Si el lazo de control es internamente estable.

Solución:

- (a) La planta y el controlador se pueden describir como:

$$G_o(s) = \frac{-(s-2)}{s^2+s+1} = \frac{B_o(s)}{A_o(s)}; \quad C(s) = \frac{s^2+s+1}{s(s+a)} = \frac{P(s)}{L(s)}.$$

Luego las funciones de sensibilidad están dadas por:

$$\begin{aligned} T_o(s) &= \frac{G_o(s)C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{B_o(s)P(s)}{A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s)}, \\ &= \frac{-(s-2)(s^2+s+1)}{(s^2+s+1)s(s+a) + [-(s-2)(s^2+s+1)]}, \\ &= \frac{-(s-2)(s^2+s+1)}{(s^2+s+1)[s(s+a) - (s-2)]}, \\ &= \frac{-(s-2)}{s^2 + (a-1)s + 2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_o(s) &= \frac{1}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{A_o(s)L(s)}{A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s)}, \\ &= \frac{(s^2+s+1)s(s+a)}{(s^2+s+1)[s(s+a) - (s-2)]}, \\ &= \frac{s(s+a)}{s^2 + (a-1)s + 2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{io}(s) &= \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{B_o(s)L(s)}{A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s)}, \\ &= \frac{-(s-2)s(s+a)}{(s^2+s+1)[s(s+a) - (s-2)]}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{uo}(s) &= \frac{C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{A_o(s)P(s)}{A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s)}, \\
 &= \frac{(s^2 + s + 1)(s^2 + s + 1)}{(s^2 + s + 1)[s(s + a) - (s - 2)]}, \\
 &= \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + (a - 1)s + 2}.
 \end{aligned}$$

- (b) Para saber si el lazo de control es internamente estable, se debe analizar el polinomio de lazo cerrado:

$$\begin{aligned}
 A_{cl}(s) &= A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s) = (s^2 + s + 1)[s(s + a) - (s - 2)], \\
 &= (s^2 + s + 1)(s^2 + (a - 1)s + 2).
 \end{aligned}$$

Dado que el $s^2 + s + 1$ tiene polos complejos conjugados estables solo queda analizar el polinomio $s^2 + (a - 1)s + 2$, como es un polinomio de segundo orden es necesario y suficiente que todos sus coeficientes sean positivos. Finalmente, el lazo de control es internamente estable si y solo si $a > 1$.

ELO270 – S2 2022 – Certamen C2

Problema 1.2 (10 puntos) Se tiene un lazo de control realimentado de un grado de libertad, donde la planta y el controlador están dados por:

$$G_o(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}; \quad C(s) = \frac{K}{s}.$$

- (a) Grafique el lugar geométrico de las raíces (LGR) cuando $K > 0$.
- (b) Si es posible encuentre los valores de K para que los modos naturales del lazo cerrado sean más rápidos que $e^{-t}\mu(t)$.

Solución:

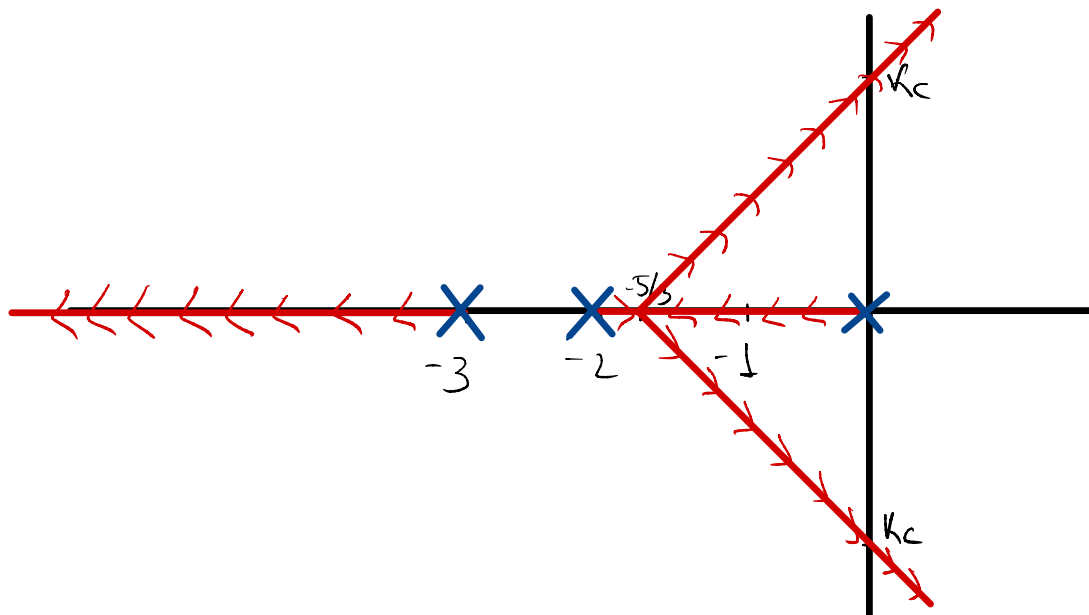
- (a) Para graficar el LGR de debe obtener el $A_{cl}(s)$

$$A_{cl}(s) = A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s) = (s+2)(s+3)s + K = D(s) + \lambda M(s)$$

- $m = 3$ y $n = 0$, por lo que hay tres ramas en el LGR.
- Los polos están en $[0, -2, -3]$ y los ceros están en el infinito. Por lo que en el eje real existe LGR entre los polos $[0, -2]$ y entre $[-\infty, -3]$.
- Cuando $\lambda \rightarrow 0$ el LGR parte en las raíces de $D(s)$. Cuando $\lambda \rightarrow \infty$ el LGR tiene 3 asíntotas hacia el infinito.
- Para las asíntotas:

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m c_i}{n - m} = \frac{-5 - 0}{3 - 0} = \frac{-5}{3}; \quad \eta_k = \frac{(2k-1)\pi}{n-m} = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}.$$

- Los cruces con el eje se pueden calcular con Routh Hurwitz.



- (b) Para que los modos naturales del lazo cerrado sean mas rápidos que $e^{-t}\mu(t)$, se debe realizar un cambio de variable $w = s + 1$, lo que implica que $s = w - 1$. Reemplazando se obtiene el nuevo $A_{cl}(s)$:

$$\begin{aligned} A_{cl}(w) &= A_o(w)L(w) + B_o(w)P(w) = [(w-1)^2 + 5(w-1) + 6](w-1) + K, \\ &= (w^2 + 3w + 3)(w-1) + K, \\ &= w^3 + 2w^2 - w - 2 + K. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior se ve que no es posible obtener una solución, pues es necesario (pero no suficiente) que los coeficientes de $A_{cl}(w)$ sean todos positivos.

O se puede aplicar Routh:

w^3	1	-1
w^2	2	$-2 + K$
w^1	$\frac{-2+2-K}{2}$	0
w^0	$-2 + K$	

Luego se tiene que cumplir que:

$$-K > 0 \rightarrow K < 0$$

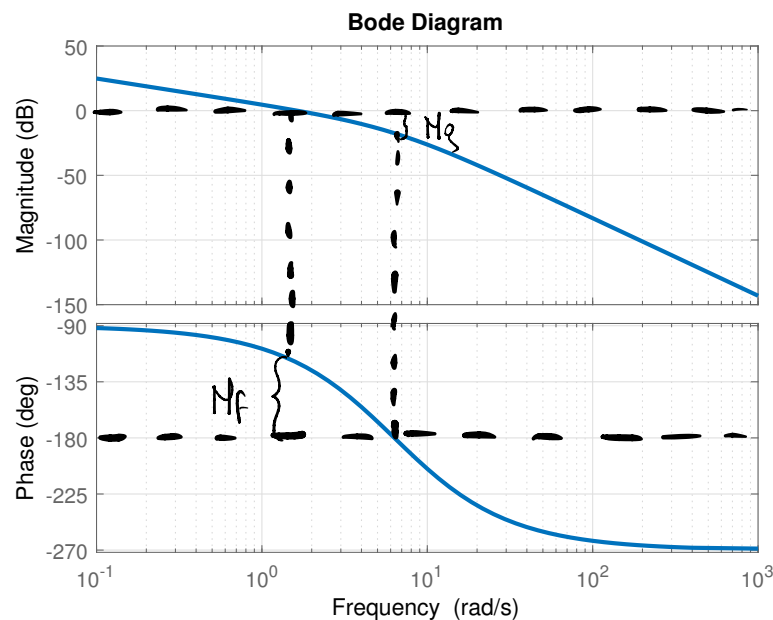
$$-2 + K > 0 \rightarrow K > 2$$

Se observa que el conjunto es vacío. Por lo que no se puede encontrar valores de K para que los modos naturales del lazo cerrado sean mas rápidos que $e^{-t}\mu(t)$.

ELO270 – S2 2022 – Certamen C2

Problema 1.3 (10 puntos) La Figura 1 muestra el diagrama de Bode de una transferencia de lazo abierto estable $G_o(s)C(s)$ sin cancelaciones. Determine:

- (a) Si el lazo cerrado es internamente estable.
- (b) En cuánto debe aumentarse o reducirse el retardo en $G_o(s)C(s)$ para que aparezca una oscilación sostenida en el lazo cerrado.



← Identificar M_f y M_g ✓✓

Figura 1: Bode pregunta 1.3

Solución:

(a) Del bode se obtiene la siguiente información:

- Cuando $|G_oC|_{dB} = 0$, se obtiene que el $M_f \approx 60 = \pi/3$, para $\omega_f \approx 1,6$ rad/s.
- Cuando $\angle G_oC = -180$, se obtiene que el $M_g \approx 17$ dB, para $\omega_g \approx 6$ rad/s.

Dado que ambos márgenes son positivos, el Nyquist no encierra el punto $(-1,0)$, es decir $N = 0$. Además, dado que el lazo abierto es estable $P = 0$. Por lo que $Z = N + P = 0$, por lo que el sistema en lazo cerrado es internamente estable.

(b) El retardo crítico se obtiene

$$T_c = \frac{M_f}{\omega_f} = \frac{\pi/3}{1,6} = 0,65 \text{ s.}$$

↑
valores
aprox. ✓✓

ELO270 – S2 2022 – Certamen C2

Problema 1.4 (10 puntos) Se tienen un lazo de control realimentado de un grado de libertad, internamente estable, donde la planta y el controlador están dados por:

$$G_o(s) = \frac{b_o}{s+a_o}; \quad C(s) = \frac{K_c(s+a_o)}{s}.$$

Sin embargo el modelo real de la planta es $G(s) = \frac{G_o(s)}{\tau s + 1}$. Determine el máximo valor que puede tener τ para estabilidad robusta.

Solución: En este caso para estabilidad robusta se debe cumplir que :

$$|T_o(j\omega)| |G_\Delta(j\omega)| \leq 1 \forall \omega.$$

$$|T_o(j\omega)|_{dB} + |G_\Delta(j\omega)|_{dB} \leq 0 \forall \omega.$$

Luego:

$$\begin{aligned} T_o(s) &= \frac{G_o(s)C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{B_o(s)P(s)}{A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s)}, \\ &= \frac{b_o K_c (s+a_o)}{(s+a_o)s + (s+a_o)K_c b_o}, \\ &= \frac{b_o K_c (s+a_o)}{(s+a_o)[s + K_c b_o]} = \frac{b_o K_c}{s + K_c b_o} = \frac{1}{\frac{1}{b_o K_c} s + 1}. \end{aligned}$$

$$G_\Delta(s) = \frac{-\tau s}{\tau s + 1}.$$

El máximo valor que puede tener τ para asegurar estabilidad robusta se puede obtener observando cuando ambos anchos de banda en el Bode son iguales

$$\frac{1}{\tau_c} = b_o K_c \rightarrow \tau_c = \frac{1}{b_o K_c}.$$

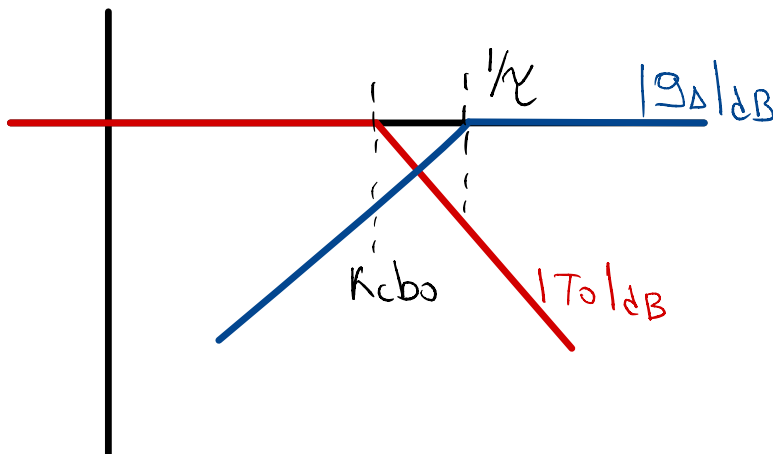


diagrama o
explicación

ELO270 – S2 2022 – Certamen C2

Problema 1.5 (10 puntos) Se tiene un lazo de control realimentado de un grado de libertad, donde la planta y el controlador están dados por:

$$G_o(s) = \frac{10}{(s+2)(s+4)}; \quad C_{PI} = K_p + \frac{K_I}{s}.$$

Determine la ganancia K_I del controlador (en función de K_p) para que el lazo cerrado presente oscilaciones sostenidas.

Solución: Para que el sistema en lazo cerrado presente oscilaciones sostenidas se debe obtener el polinomio A_{cl} , luego a través de Routh encontrar K_I crítico

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) &= A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s) = (s+2)(s+4)s + 10(K_p s + K_I), \\ &= s^3 + 6s^2 + (8 + 10K_p)s + 10K_I. \end{aligned}$$

s^3	1	$8 + 10K_p$
s^2	6	$10K_I$
s^1	$\frac{48 + 60K_p - 10K_I}{6}$	0
s^0	$10K_I$	

Para que existan oscilaciones sostenidas una fila del Routh debe hacerse cero por lo que:

$$\frac{48 + 60K_p - 10K_I}{6} = 0 \rightarrow K_I = 4,8 + 6K_p.$$