

ELO270 – S2 2022 – Examen Final

Problema 1.1 (10 puntos) Considere una planta a controlar con modelo nominal dado por:

$$G_o(s) = \frac{e^{-T_d s}}{s^2 + \omega_o^2}.$$

Se sabe además que la referencia a seguir es de tipo escalón unitario. Proponga un controlador por asignación de polos adecuado en base a la información disponible (no es necesario obtener los parámetros del controlador).

Solución: Dada la información disponible se tiene que para seguimiento perfecto de la referencia $r = 1$. Además se tiene tiempo muerto:

- Despreciar, lo que implica error de modelado y que $BW(T_o) \leq 1/T_d$ rad/s.
- Padé, lo que implica error de modelado y que $BW(T_o) \leq 3/T_d$ rad/s.
- Smith, no se puede utilizar porque el sistema no es estable.

Dado que no dan más especificaciones se puede despreciar el tiempo muerto por lo que el sistema es:

$$G_o(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_o^2},$$

con $n = 2$, lo que implica que $n_l = n_p = n - 1 + r = 2 - 1 + 1 = 2$. Por lo que el controlador es:

$$C(s) = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s + l_0)},$$

El polinomio de lazo cerrado es:

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) &= A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s) = (s^2 + \omega_o^2)s(s + l_0) + p_2 s^2 + p_1 s + p_0, \\ &= s^4 + l_0 s^3 + (\omega_o^2 + p_2)s^2 + (\omega_o l_0 + p_1)s + p_0 \end{aligned}$$

Para la asignación de polos se selecciona como ancho de banda $BW(T_o) = 0,5/T_d$ rad/s, el polinomio deseado es:

$$A_{cl_{deseado}}(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + 10/T_d)^2,$$

con $\omega_n = 0,5/T_d$ y $0,6 \leq \zeta \leq 0,8$.

ELO270 – S2 2022 – Examen Final

Problema 1.2 (10 puntos) Considere una planta a controlar con modelo nominal dado por:

$$G_o(s) = \frac{K}{s + \alpha},$$

en que $K > 0$ y $\alpha > 0$. Se sabe además que existe una perturbación de salida $d_0(t) = A \cos(Bt)$. Diseñe un controlador adecuado que compense perfectamente en estado estacionario dicha perturbación.

Solución: Como se desea eliminar la perturbación que es de tipo oscilatoria (con frecuencia de oscilación en B rad/s) el controlador debe ser de la forma:

$$C(s) = \frac{P(s)}{(s^2 + B^2)\bar{L}(s)},$$

esto quiere decir que $r = 2$. Luego dado que el orden de la planta es $n = 1$, el orden del controlador es $n_l = n_p = n - 1 + r = 1 - 1 + 2 = 2$, por lo que:

$$C(s) = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{(s^2 + B^2)},$$

Puede tener integración

para simplificar los cálculos se pueden realizar cancelaciones estables por lo que el controlador finalmente es:

$$C(s) = \frac{(s + \alpha)(p_1 s + p_0)}{(s^2 + B^2)}.$$

El polinomio de lazo cerrado es:

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) &= A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s) = (s + \alpha)(s^2 + B^2) + K(s + \alpha)(p_1 s + p_0), \\ &= (s + \alpha)(s^2 + K p_1 s + K p_0 B^2). \end{aligned}$$

Para la asignación de polos se selecciona $\omega_n = B$ y $\zeta = 0,7$. Luego:

Puede ser mayor

$$A_{cl_{deseado}}(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 1,4Bs + B^2 = s^2 + K p_1 s + K p_0 B^2,$$

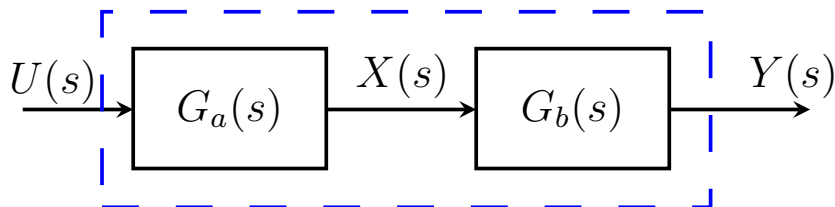
finalmente:

$$\begin{aligned} B^2 &= K p_0 B^2 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{K}, \\ 1,4B &= K p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{1,4B}{K}. \end{aligned}$$

ELO270 – S2 2022 – Examen Final

Problema 1.3 (10 puntos) La figura muestra el diagrama de bloques de una planta a controlar en que las funciones de transferencia son:

$$G_a(s) = \frac{1}{s-1}; \quad G_b(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}.$$

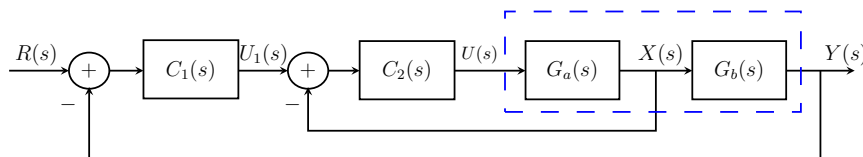


Considere que tanto $x(t)$ como $y(t)$ son medibles sin ruido para frecuencias menores a 5 rad/s y que la referencia a seguir es tipo escalón. Proponga un esquema de control adecuado (no es necesario calcular cada bloque) indicando claramente los criterios de diseño que se deben tener en cuenta en base a la información disponible.

Solución: Al observar el sistema se tienen las siguientes especificaciones:

- Polo inestable $\Rightarrow$ overshoot $\Rightarrow BW(T_o) \geq 1$ rad/s. ✓
- Tiempo muerto
 - Despreciar, lo que implica error de modelado y que $BW(T_o) \leq 1$ rad/s.
 - Padé, lo que implica error de modelado y que $BW(T_o) \leq 3$ rad/s.
 - Smith, no se puede utilizar porque el sistema es inestable.
- Ruido de medición en ambas variables $BW(T_o) \leq 5$ rad/s. ✓

Como se observa se puede realizar un esquema de control en cascada, ya que $G_a(s)$ es inestable por lo que el controlador interno se puede utilizar para estabilizar rápidamente el sistema.



Especificaciones del controlador interno $C_2(s)$: $1 \leq BW(T_o) \leq 5$ (polo inestable y ruido de medición). El orden de $G_a(s)$ es $n = 1$, lo que implica que el orden del controlador es $n_l = n_p = 1$ si se asume integración.

$$C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s}.$$

Puede ser sin integración

Especificaciones del controlador externo $C_1(s)$: $BW(T_o) \leq 3$ y $BW(T_o) \leq 5$ (aproximación de Padé y ruido de medición), finalmente debe ser $BW(T_o) \leq 3$. El orden del sistema equivalente $\tilde{G}_o(s) = T_{o2}(s)G_b(s)$ es $n = 4$, lo que implica que el orden del controlador es $n_l = n_p = 4$ si se asume integración.

$$C(s) = \frac{p_4 s^4 + p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0)}.$$

También se puede usar Smith con planta ampliada y no sería necesario $BW(T_o) \leq 3$ rad/s.

ELO270 – S2 2022 – Examen Final

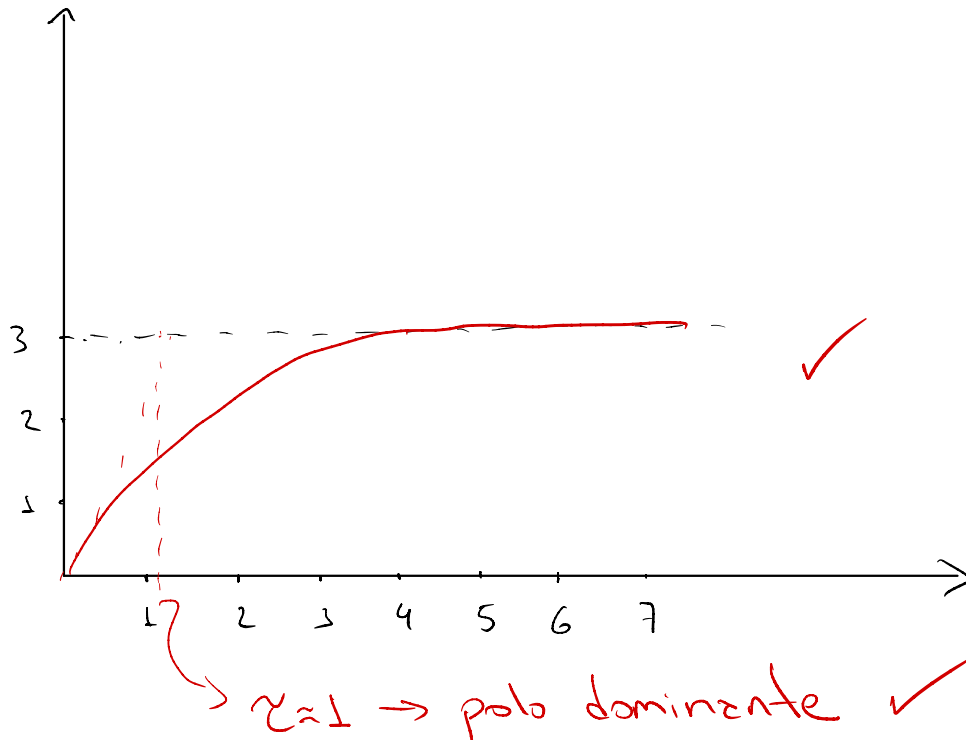
Problema 1.4 (10 puntos) Considere una planta a controlar cuyo modelo está dado por la función transferencia:

$$G(s) = \frac{30}{(s+1)(s+10)}.$$

- (a) Haga un gráfico aproximado de la respuesta de la planta a un escalón unitario.
- (b) Se sabe que la referencia a seguir está en la banda de 0 a 2 rad/s y que el ruido de medición es no despreciable para frecuencias mayores a 5 rad/s. Diseñe un controlador PI adecuado en base a toda la información disponible.

Solución:

(a)



(b) Del enunciado se obtiene:

- Para seguimiento de la referencia $BW(T_o) \geq 2$ rad/s. ✓
 - Para el ruido $BW(T_o) \leq 5$ rad/s. ✓
 - El controlador debe tener integración $r = 1$. ✓
 - Estructura del controlador PI: $C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s}$. ✓
- (si usa otra estructura pierde los puntos)

Dado que el orden del sistema es $n = 2$, esto implica que para utilizar asignación de polos el orden del controlador debe ser $n_l = n_p = n - 1 + r = 2 - 1 + 1 = 2$, es decir un controlador PID. ✓

Pero al observar el sistema y la Figura de la parte a) se ve que existe un polo rápido que puede ser despreciado, ya que $BW(T_o) \leq 10$ rad/s:

$$G_o(s) = \frac{3}{(s+1)}. \quad \checkmark$$

Según las especificaciones el ancho de banda debe ser $2 \leq BW(T_o) \leq 5$ rad/s, para este caso se va a seleccionar $BW(T_o) = 3$ rad/s. El polinomio de lazo cerrado es:

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) &= A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s) = (s+1)s + 3(p_1 s + p_0), \\ &= s^2 + (1 + 3p_1)s + 3p_0. \end{aligned}$$

Para la asignación de polos se selecciona $\omega_n = 3$ y $\zeta = 0,7$. Luego:

$$A_{cl_{deseado}}(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 4,2s + 9 = s^2 + (1 + 3p_1)s + 3p_0,$$

finalmente:

$$\begin{aligned} 9 &= 3p_0 \Rightarrow p_0 = 3, \\ 4,2 &= 1 + 3p_1 \Rightarrow p_1 = 1,06. \end{aligned}$$