Certamen #1 – ELO370 – S2 2016

Soluciones

Problema 1.1 (10 puntos) *Un sistema de tiempo discreto tiene una función transferencia*

$$G(z) = \frac{0{,}5z^2 - 1{,}2z + 0{,}7}{z^2}$$

Grafique la respuesta a un escalón unitario $u[k] = \mu[k]$ con condiciones iniciales iguales a cero.

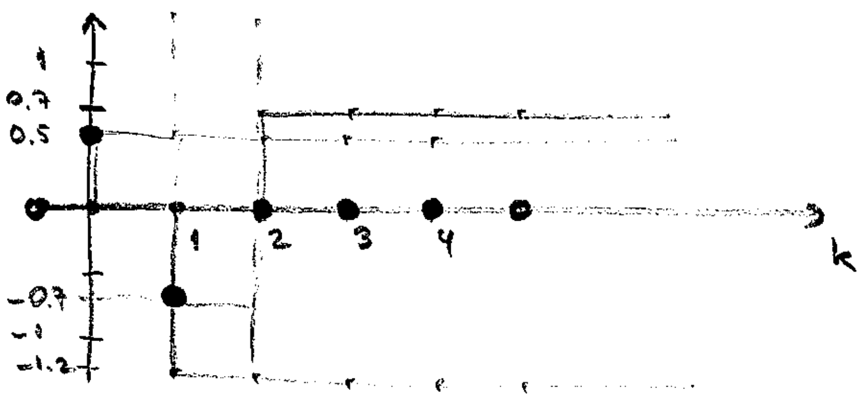
Solución

Note que la ecuación recursiva asociada es

$$y[k] = 0.5\,u[k] - 1.2\,u[k-1] + 0.7\,u[k-2]$$

Por tanto, la respuesta cuando $u[k] = \mu[k]$ es

$$y[k] = 0.5\,\mu[k] - 1.2\,\mu[k-1] + 0.7\,\mu[k-2]$$



pues

k	$0.5\,\mu[k]$	$-1.2\,\mu[k-1]$	$0.7\,\mu[k-2]$	$y[k]$
0	0.5	0	0	0.5
1	0.5	−1.2	0	−0.7
2	0.5	−1.2	+0.7	0
3	0.5	−1.2	0.7	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Problema 1.2 (10 puntos) *Determine la función transferencia de pulso del modelo muestreado exacto cuando se utiliza un retentor de orden cero para el sistema*

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

con periodo de muestreo T_s.

$$\mathcal{L}\{t^m\} = \frac{m!}{s^{m+1}}$$

$$Z\{k^m\} = -z\frac{d}{dz}Z\{k^{m-1}\}$$

Solución

Hay (al menos) dos soluciones:

a) $G_d(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}\Big|_{t=kT_s}\right\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{t^2}{2!} \Rightarrow G_d(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{T_s^2}{2!}k^2\right\}$$

$$= \frac{(z-1)}{z}\frac{T_s^2}{2!}\left(-z\frac{d}{dz}Z\{k\}\right)$$

$$= \frac{T_s^2}{2!}(z-1)(-1)\frac{d}{dz}\left\{-z\frac{d}{dz}\left\{\frac{z}{z-1}\right\}\right\}$$

$$= \frac{T_s^2}{2!}(z-1)(-1)\frac{d}{dz}\left\{\frac{z}{(z-1)^2}\right\}$$

$$= \frac{T_s^2}{2!}\cancel{(z-1)}(-1)\frac{\left[(z-1)^2 - 2z\cancel{(z-1)}\right]}{(z-1)^4}$$

$$= \frac{T_s^2}{2!}\frac{z+1}{(z-1)^2}$$

b) $\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned}\right\}$ $\quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$, $\quad y = [1\ 0]x$

$$\Rightarrow e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}{s^2}\right\}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_d = e^{AT_s} = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A\eta}B\,d\eta = \int_0^{T_s}\begin{bmatrix} \eta \\ 1 \end{bmatrix}d\eta = \begin{bmatrix} T_s^2/2 \\ T_s \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G_d(z) = C(zI-A_d)^{-1}B_d = [1\ 0]\begin{bmatrix} z-1 & -T_s \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} T_s^2/2 \\ T_s \end{bmatrix} = \frac{[z-1\quad T_s]}{(z-1)^2}\begin{bmatrix} T_s^2/2 \\ T_s \end{bmatrix}$$

$$= \frac{T_s^2}{2}\frac{z+1}{(z-1)^2}$$

Problema 1.~~4~~ 3 (10 puntos) *El modelo muestreado exacto de un sistema usando un retentor de orden cero es*

$$G(z) = \frac{b_o}{z - a_o}$$

Determine el modelo muestreado cuando la frecuencia de muestreo se aumenta al doble.

Solución

$G(z)$ es de la forma $\dfrac{K}{z - e^{aT_s}}$

Al duplicar la frecuencia de muestreo a $\tilde{f}_s = 2f_s$

$$\Rightarrow \quad \tilde{T}_s = \frac{1}{\tilde{f}_s} = \frac{1}{2}T_s$$

Entonces: i) el polo discreto se desplaza a

$$\tilde{a}_o = e^{a\tilde{T}_s} = e^{\frac{aT_s}{2}} = \sqrt{a_o}$$

ii) se preserva la ganancia a continua

$$G(1) = \frac{b_o}{1 - a_o}$$

$$\therefore \quad \tilde{G}(z) = \frac{b_o}{1 - a_o} \cdot \frac{1 - \sqrt{a_o}}{z - \sqrt{a_o}}$$

Problema 1.4 (10 puntos) *Un sistema de tiempo continuo tiene un modelo*

$$G_o(s) = \frac{1}{s+1}$$

Se desea controlar dicho sistema con un controlador digital proporcional $C(z) = K_p$ y usando retentor de orden cero. Determine el período de muestreo T_s y el valor de K_p para que el ancho de banda del lazo cerrado sea aproximadamente de 5 [rad/s].

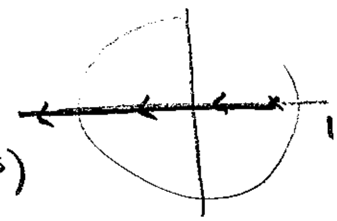
Solución

Note que el modelo muestreado es

$$G_d(z) = \frac{1-e^{-T_s}}{z-e^{-T_s}}$$

Con un controlador proporcional es posible desplazar el polo de lazo cerrado hacia la izquierda cuanto se desee:

$$A_{cl}(z) = z - e^{-T_s} + k_p(1-e^{-T_s})$$

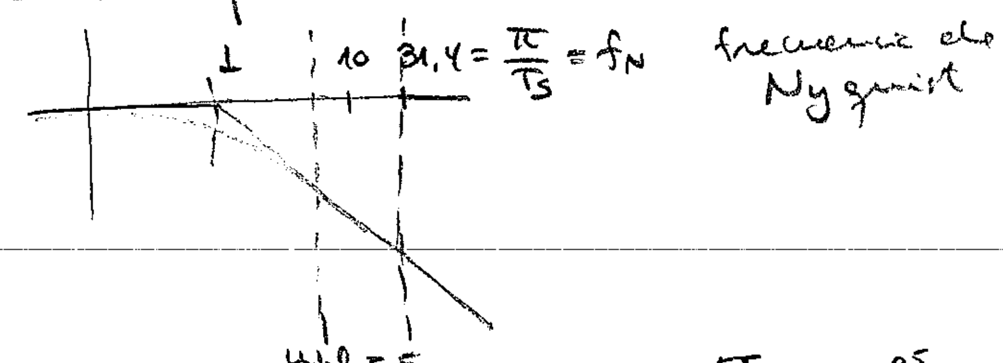


polo de lazo cerrado en $e^{-T_s} - k_p(1-e^{-T_s})$

¡Hay infinitas soluciones!

Por ejemplo, $T_s = 0.1$ para que en $\tau = 1$ haya 10 muestras

Entonces Bode de la planta discretizada



El polo de lazo cerrado debe estar en $e^{-5T_s} = e^{-0.5}$

$$\Rightarrow K_p = \frac{e^{-T_s} - e^{-5T_s}}{1-e^{-T_s}} = \frac{e^{-0.1} - e^{-0.5}}{1-e^{-0.1}}$$

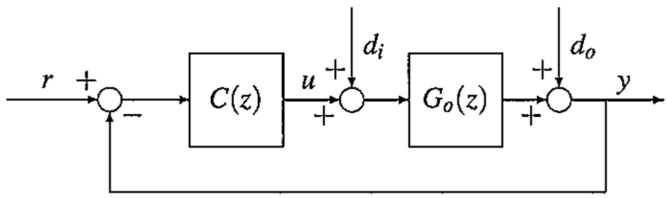


Figura 1: Diagrama de bloques de sistema discreto en lazo cerrado.

Problema 1.5 (10 puntos) *En un lazo de control de tiempo discreto como el de la Figura 1*

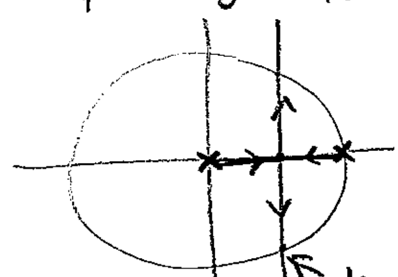
$$C(z) = \frac{Kz}{z-1} \qquad G_o(z) = \frac{1}{z^2}$$

Determine el rango de valores de K para los que el lazo es internamente estable.

Solución

$$A_{cl}(z) = z\left((z-1)z + k\right) = z\left(z^2 - z + k\right)$$

$\Rightarrow$ polos de lazo cerrado en $z_1 = 0$ y $z_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - k}$



Al menos dos formas de resolver:

(i) El valor $k = k_{crítico}$ corresponde a raíces en $-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ es decir cuando $1 - 4k = -3 \Leftrightarrow \boxed{k = 1}$

Por tanto $0 < k < 1$

(ii) Por Jury:

z^2	z	1
1	-1	k
k	-1	1
$1-k^2$	$-1+k$	0
$-1+k$	$1-k^2$	0
x		

$$x = (1-k^2) - \frac{(-1+k)}{1-k^2}(-1+k)$$

Condiciones

i) $|1-k^2| > 0 \Rightarrow \boxed{|k| < 1}$

ii) $|x| > 0$

$$\Rightarrow \frac{(1-k)}{1+k}\left[(1+k)^2 - 1\right] > 0$$

$$\Rightarrow k(k+2) > 0$$

$\boxed{k>0}$ o $k < -2$

Problema 1.6 (10 puntos) *En un lazo de control de tiempo discreto como el de la Figura 1*

$$C(z) = \frac{z}{z-1} \qquad G_o(z) = \frac{z-0{,}8}{z(z-0{,}9)}$$

Determine si, en estado estacionario, una perturbación de entrada de frecuencia igual a $f_s/4$ es amplificada o atenuada en la salida (f_s es la frecuencia de muestreo en Hertz).

Solución

$$S_{io}(z) = \frac{G_o(z)}{1+G_o(z)C(z)} = \frac{(z-1)(z-0.8)}{z(z-0.9)(z-1) + z(z-0.8)}$$

$$= \frac{z^2-1.8z+0.8}{z(z^2-0.9z+0.1)}$$

Para determinar si la perturbación es amplificada o atenuada, se debe calcular

$$|S_{io}(e^{j\omega_o T_s})| \quad \text{en que} \quad \omega_o = \frac{1}{4}\omega_s = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{T_s}$$

$$\Rightarrow e^{j\omega_o T_s} = e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

$$\Rightarrow |S_{io}(e^{j\omega_o T_s})| = |S_{io}(j)|$$

$$= \left|\frac{-1-1.8j+0.8}{j(-1-0{,}9j+0.1)}\right|$$

$$= \frac{|-0.2-1.8j|}{|-0{,}9-0{,}9j|}$$

$$\Rightarrow |S_{io}(j)|^2 = \frac{0.04+(1.8)^2}{2\cdot 0{,}81} > 1 \quad \Rightarrow \text{es } \underline{\text{amplificada}}$$