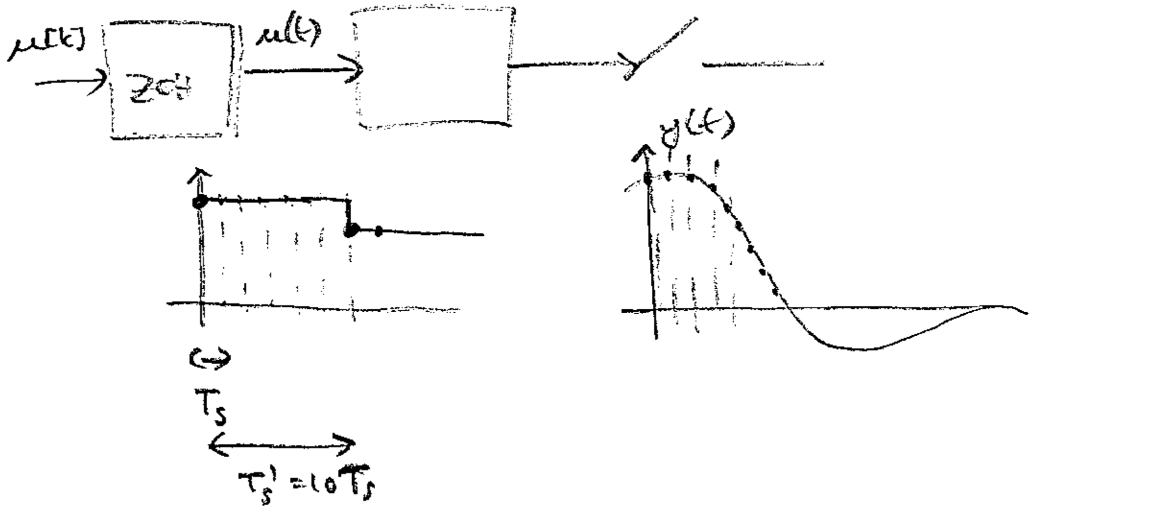
Certamen #2 – ELO370 – S2 2016
Soluciones

Problema 2.1 (10 puntos) *Se desea construir un observador de tiempo discreto para un sistema lineal tiempo continuo. La salida de la planta $y(t)$ se muestrea (instantáneamente) a una tasa 10 veces mayor que la tasa de actualización de la actuación $u(t)$ (a través de un ZOH). Explique claramente como diseñaría dicho observador*

Solución

Sea $\boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}}$ el sistema de tiempo continuo a observar

Note que el hecho que la actuación se actualice más lento (que lo que se muestrea la salida) NO es problema pues dado que es generada por un ZOH, se conoce su valor (que permanece constante) para todos los instantes de muestreo de la salida



Por tanto se puede diseñar un observador que se actualice a la tasa de muestreo de la salida T_s

$$\hat{x}(kT_s + T_s) = A_q \hat{x}(kT_s) + B_q u(kT_s) + J\left(y(kT_s) - C\hat{x}(kT_s)\right)$$

con la restricción que $u(kT_s) = u((k+1)T_s) = \ldots = u((k+9)T_s)$

y $u((k+10)T_s) = u(\underbrace{kT_s' + T_s'}_{\text{instante en que se actualiza } u})$

Problema 2.2 (10 puntos) *Se desea controlar digitalmente una planta con modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{2}{s+3}$$

de tal forma que siga referencias constantes y rechace perturbaciones de salida en la banda de 0 a 6 [rad/s]. Diseñe un controlador $C_q(z)$ indicando claramente como considera los requisitos de diseño y la información disponible.

Solución

- No se establece límite a la tasa de muestreo.
- Para rechazar perturbaciones hasta 6 rad/s $\quad Bw(A_{cl}) > 6 \frac{rad}{s}$

  $\Rightarrow$ Frecuencia de Nyquist al menos igual a 60 $\frac{rad}{s}$

  $\Rightarrow$ Elegimos $\frac{\pi}{T_s} > 60 \Rightarrow T_s < \frac{\pi}{60} \approx 0{,}05$
- El modelo muestreado de $G_o(s)$ es $G_q(z) = \frac{(1-e^{-3T_s})}{(z-e^{-3T_s})}\frac{2}{3}$
- El controlador $C_q(z)$ debe tener polo en $z=1$ para garantizar seguimiento a referencia constante (Una restricción: $\rho=1$)
- Ancho de banda de 6 [rad/s] se logra poniendo un polo dominante de lazo cerrado en $z = e^{-6T_s}$
- Asignación de polos:

$$A_{cl}(z) = A_o(z)L(z) + B_o(z)P(z)$$

$$\underbrace{(z-e^{-6T_s})}_{\text{fija } Bw}\underbrace{(z-e^{-3T_s})}_{\text{fuerza cancelación}} = (z-e^{-3T_s})(z-1) + \frac{2}{3}(1-e^{-3T_s})(p_1 z + p_0)$$

$$\Rightarrow z - e^{-6T_s} = z - 1 + \frac{2}{3}(1-e^{-3T_s})\tilde{p}_1$$

$$\tilde{p}_1 = \left(\frac{1-e^{-6T_s}}{1-e^{-3T_s}}\right)\frac{3}{2}$$

$$y \quad C_q(z) = \frac{\tilde{p}_1(z-e^{-3T_s})}{z-1}$$

Problema 2.2 (10 puntos) *Se desea controlar digitalmente una planta con modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{2}{s+3}$$

de tal forma que siga referencias constantes y rechace perturbaciones de salida en la banda de 0 a 6 [rad/s]. Diseñe un controlador $C_q(z)$ indicando claramente como considera los requisitos de diseño y la información disponible.

Solución

Controlador continuo:

$$C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s}$$

$$A_{cl}(s) = s^2 + 3s + 2p_1 s + 2p_0 = (s+6)^2 \qquad \left(\text{o bien } (s+3)(s+6)\right)$$

$$3 + 2p_1 = 12 \Rightarrow p_1 = 4{,}5$$

$$2p_0 = 36 \Rightarrow p_0 = 18.$$

$$\therefore C(s) = \frac{4{,}5 s + 18}{s}$$

Discretizando por Tustin: (elegir periodo de muestreo...)

$$C(z) = \frac{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \cdot 4{,}5 + 18}{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{9(z-1) + 18T_s(z+1)}{2(z-1)}.$$

$$= \frac{(4{,}5 + 9T_s)z + (9T_s - 4{,}5)}{z-1}.$$

Problema 2.3 (10 puntos) *Diseñe un controlador de latido muerto (*dead-beat*) para la planta cuyo modelo discretizado exacto (usando ZOH y muestreo de salida instantáneo) es*

$$G_q(z) = \frac{0{,}4(z-0{,}9)}{(z-0{,}8)(z-0{,}75)}$$

Solución

$$C(z) = \frac{p_1 z + p_0}{z - l_0}$$

$$A_{cl}(z) = (z-0{,}8)(z-0{,}75)(z-l_0) + (p_1 z + p_0)\, 0{,}4\,(z-0{,}9) = z^3$$

$$= (z^2 - 1{,}55z + 0{,}6)(z-l_0) + 0{,}4\,(p_1 z^2 - 0{,}9 p_1 z + p_0 z - 0{,}9 p_0) = z^3$$

$$= \cancel{z^3} - 1{,}55z^2 - l_0 z^2 + 0{,}6z + 1{,}55 l_0 z - 0{,}6 l_0 + 0{,}4 p_1 z^2 - 0{,}36 p_1 z + 0{,}4 p_0 z - 0{,}36 p_0 = \cancel{z^3}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} -1{,}55 - l_0 + 0{,}4 p_1 = 0 \\ 0{,}6 + 1{,}55 l_0 - 0{,}36 p_1 + 0{,}4 p_0 = 0 \\ -0{,}6 l_0 - 0{,}36 p_0 = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad l_0 = -0{,}6 p_0$$

$$0{,}6 p_0 + 0{,}4 p_1 = 1{,}55$$

$$0{,}53 p_0 + 0{,}36 p_1 = 0{,}6$$

$$\left(0{,}6 - 0{,}53 \cdot \frac{10}{9}\right) p_0 = 1{,}55 - 0{,}6 \cdot \frac{10}{9} \quad \ldots$$

Problema 2.3 (10 puntos) *Diseñe un controlador de latido muerto (*dead-beat*) para la planta cuyo modelo discretizado exacto (usando ZOH y muestreo de salida instantáneo) es*

$$G_q(z) = \frac{0{,}4(z-0{,}9)}{(z-0{,}8)(z-0{,}75)}$$

Solución

Se desea $T_o(z) = G_q(z)\, Q_q(z) = \dfrac{p_1(z)}{z^{n_1}}$

y $S_{uo}(z) = Q_q(z) = \dfrac{p_2(z)}{z^{n_2}}$

$Q_q(z)$ debe ser estable y propia

$$Q_q(z) = \frac{(z-0.8)(z-0.75)}{z^2} \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow \quad T_o(z) = \frac{0.4(z-0.9)}{z^2} \cdot \alpha \qquad \alpha = \frac{-1}{(0.4)(0{,}9)}$$

$\Rightarrow \quad T_o(1) = 1$

$$Q_q(z) = \frac{C(z)}{1 + G_q(z)C(z)} \Rightarrow C(z) = \frac{\dfrac{(z-0{,}8)(z-0{,}75)\alpha}{z^2}}{1 - \dfrac{0{,}4(z-0{,}9)\alpha}{z^2}}$$

$$= \frac{(z-0{,}8)(z-0{,}75)\alpha}{z^2 - 0{,}4\alpha(z-0{,}9)}$$

Problema 2.4 (10 puntos) *Se desea controlar una planta continua*

$$G_o(s) = \frac{1}{s+1}$$

usando un controlador resonante de manera de seguir perfectamente en estado estacionario una referencia sinusoidal de frecuencia 2 *[rad/s].*

Si el diseño del controlador se hace en tiempo continuo y luego se discretiza usando Tustin, determine si el controlador es resonante y, en caso que lo sea, a qué frecuencia aparece dicha resonancia.

Solución

Para diseñar en continuo:

$$G_o(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow n = 1$$

$$C(\pm j2) = \infty \Rightarrow r = 2$$

$$\therefore n_c = n - r + 1 = 2 \Rightarrow C(s) = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s^2 + 4}$$

$$\Rightarrow A_{cl}(s) = A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s)$$

$$\underbrace{(s+1)}_{\text{fuerza cancelación}}\underbrace{(s+4)(s+5)}_{\text{determina } B_w(A_{cl})} = (s+1)(s^2+4) + 1(p_2 s^2 + p_1 s + p_0)$$

$$\Rightarrow s^2 + 9s + 20 = s^2 + \tilde{p}_1 s + 4 + \tilde{p}_0$$

$$\tilde{p}_1 = 9$$
$$\tilde{p}_0 = 16$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{(s+1)(9s+16)}{s^2+4}$$

Aplicar Tustin: $C_q(z) = C\left(\frac{2}{h}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right)$

$$z = e^{sT_s} \approx \frac{1 + s\frac{T_s}{2}}{1 - s\frac{T_s}{2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$s = \frac{2(z-1)}{h(z+1)} \Rightarrow \text{polos en } s = \pm j2 = \frac{2}{h}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

$$\Rightarrow z = \frac{1 \pm jT_s}{1 \mp jT_s} = 1\angle \pm 2\arctan(T_s)$$

La resonancia aparece en $w = \frac{2\arctan(T_s)}{T_s}$

Si se discretiza $C(s)$ por Tustin :

$$C_q(z) = \frac{\left(\frac{2}{T_s}\frac{(z-1)}{z+1} + 1\right)\left(\frac{9\cdot 2}{T_s}\frac{(z-1)}{z+1} + 16\right)}{\frac{2^2}{T_s^2}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 4}$$

$$= \frac{\left(2(z-1) + T_s(z+1)\right)\left(18(z-1) + 16T_s(z+1)\right)}{4(z-1)^2 + T_s^2(z+1)^2\cdot 4}.$$

Se estudian los polos de $C_q(z)$:

$$(1+T_s^2)z^2 + (2T_s^2-2)\,z + 1 + T_s^2 = 0.$$

$$z = \frac{2-2T_s^2 \pm \sqrt{\cancel{4T_s^4} - 8T_s^2 + \cancel{4} - \cancel{4} - 8T_s^2 - \cancel{4T_s^4}}}{2(1+T_s^2)}$$

$$z = \frac{1-T_s^2 \pm 2T_s j}{1+T_s^2} = 1 \angle \operatorname{Arctg}\left(\frac{2T_s}{1-T_s^2}\right) \qquad (T_s < 1)$$

La resonancia aparece en $w = \frac{1}{T_s}\arctan\left(\frac{2T_s}{1-T_s^2}\right)$ //

Note que $z = \frac{1-T_s^2 \pm 2T_s j}{1+T_s^2} = \frac{(1 \pm jT_s)^2}{(1+jT_s)(1-jT_s)} = \underbrace{\frac{(1 \pm jT_s)}{(1 \mp jT_s)}}$

Lo mismo que se obtuvo en la página anterior.

Problema 2.5 (10 puntos) *Considere el modelo en variables de estado*

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u[k]$$
$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]$$

Determine, si es posible, la ganancia de realimentación del estado observado K y la ganancia del observador J tal que los polos de lazo cerrado se ubiquen en $z = 0$.

Solución

$$\det(zI-(A-BK)) = z^2 = \det\left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_0 & k_1 \\ k_0 & k_1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} z-0{,}5+k_0 & k_1-0{,}25 \\ k_0 & z+k_1-0{,}25 \end{pmatrix} = (z-0{,}5+k_0)(z+k_1-0{,}25) - k_0(k_1-0{,}25) = z^2.$$

$$k_1 - 0{,}25 + k_0 - 0{,}5 = 0 \Rightarrow k_1 + k_0 = 0{,}75$$

$$\cancel{k_0k_1} - \cancel{0{,}25k_0} - 0{,}5k_1 + 0{,}125 - \cancel{k_0k_1} + \cancel{0{,}25k_0} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} k_1 = 0{,}25 \\ k_0 = 0{,}5 \end{array}}$$

$$\det(zI-(A-JC)) = z^2 = \det\left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_0 & 0 \\ j_1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} z-0{,}5+j_0 & -0{,}25 \\ j_1 & z-0{,}25 \end{pmatrix} = z^2 + (j_0-0{,}5-0{,}25)z + 0{,}125 - 0{,}25j_0 + 0{,}25j_1 = z^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} j_0 = 0{,}75 \\ j_1 = 0{,}25 \end{array}}$$