

# Solución

**ELO370 – S2 2016 – Control #1 – 20 de agosto de 2016**

**Problema 1.1** Un sistema está definido por su ecuación recursiva

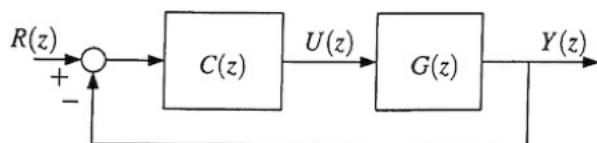
$$y[k] - 1,5y[k-1] + 0,56y[k-2] = 0,12u[k-2]$$

(a) Determine la respuesta  $y[k]$  cuando la entrada  $u[k]$  es un escalón unitario de tiempo discreto y las condiciones iniciales son cero.

Para controlar el sistema antes definido, se implementa un lazo de control en tiempo discreto con un controlador proporcional  $C(z) = K_p$ , en que  $K_p > 0$ .

(b) ~~Determine la respuesta del lazo  $y[k]$  cuando la referencia  $r[k]$  es un escalón unitario de tiempo discreto y las condiciones iniciales son cero.~~

(c) ¿Es el lazo estable?



(a) la función transferencia es

$$H(z) = \frac{0,12 z^{-2}}{1 - 1,5z^{-1} + 0,56z^{-2}} = \frac{0,12}{(z-0,7)(z-0,8)}$$

Si  $u[k] = \mu[k] \Rightarrow U(z) = \frac{z}{z-1}$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{0,12}{(z-0,7)(z-0,8)} \cdot \frac{z}{z-1} = H(z) U(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{A}{z-0,7} + \frac{B}{z-0,8} + \frac{C}{z-1}$$

$$A = \frac{0,12 \cdot 0,7}{(-0,1)(-0,3)} \quad B = \frac{0,12 \cdot 0,8}{0,1 \cdot (-0,2)} \quad C = \frac{0,12}{0,3 \cdot 0,2}$$

$$A = 2,8 \quad B = -4,8 \quad C = 2$$

$$\Rightarrow y[k] = (2,8(0,7)^{k-1} - 4,8(0,8)^{k-1} + 2) \mu[k-1]$$

Gráficamente (no se pide)



(b) Para determinar si el lazo es estable, calculamos la transferencia de lazo cerrado (no hay cancelaciones.)

$$T_o(z) = \frac{GC}{1+GC} = \frac{0.12k}{(z-0.7)(z-0.8) + 0.12k}$$

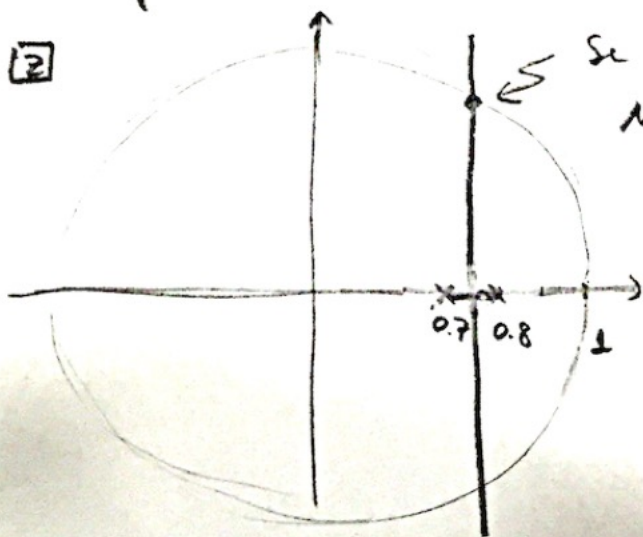
$$= \frac{0.12k}{z^2 - 1.5z + (0.56 + 0.12k)}$$

Los polos del lazo cerrado son

$$P_{1,2} = \frac{1.5 \pm \sqrt{(1.5)^2 - 4(0.56 + 0.12k)}}{2}$$

Pueden obtenerse explícitamente, pero la condición para estabilidad es que su magnitud sea  $< 1$ .

(De hecho por LGR:



Se observa que hay un valor crítico para estabilidad, es decir,

$$K_p < K_{p, \max}$$

porque  $|P_{1,2}| < 1$