(Solución)

ELO370 – S2 2016 – Control #2 – 12 de septiembre de 2016

Problema 2.1 *La función transferencia de un sistema de tiempo continuo es*

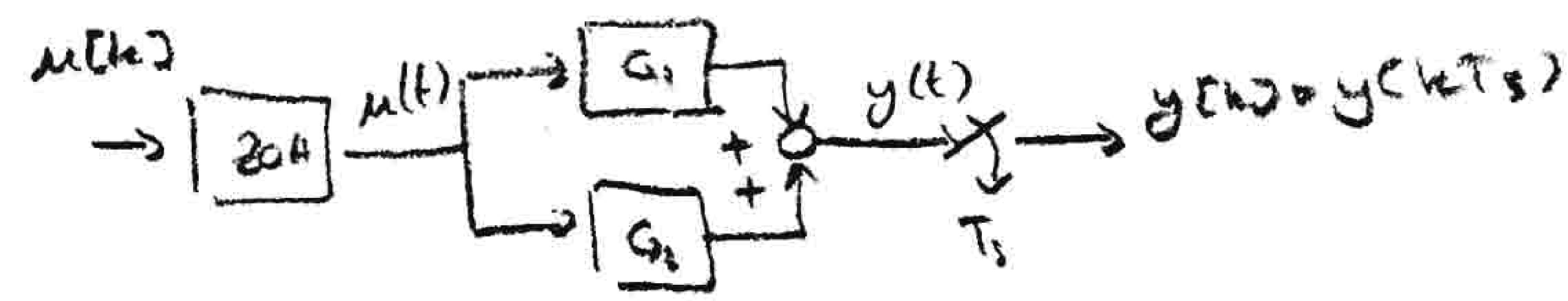
$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) \qquad \text{, en que} \quad G_1(s) = \frac{2}{s+3} \quad y \quad G_2(s) = \frac{1}{s^2+4}$$

(a) Determine el modelo muestreado (exacto) correspondiente a $G(s)$ cuando se utiliza un retentor de orden cero, eligiendo un período de muestreo adecuado.

(b) Haga un gráfico de la salida del modelo muestreado obtenido $y[k]$, cuando la entrada $u[k]$ es un escalón unitario de tiempo discreto y las condiciones iniciales son cero.

(c) Si la entrada al sistema muestreado es una sinusoide a la frecuencia de Nyquist, grafique la entrada $u(t)$ correspondiente y la respuesta en frecuencia del modelo muestreado a dicha frecuencia.

(a) Podemos calcular el modelo muestreado para cada subsistema.



$\Rightarrow G_d(z) = G_{1d}(z) + G_{2d}(z)$

$$ZOH\{G_1(s)\} = \frac{2}{3}\left(\frac{1-e^{-3T_s}}{z-e^{-3T_s}}\right) = G_{1d}(z)$$

Para el sistema de 2do orden puede hacerse en transferencia o en variables de estado:

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2+4} \iff \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 + u \\ y &= x_1 \end{aligned} \iff \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0]x$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G_2(s)}{s}\right\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta s + \gamma}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{4} \quad \beta = -\frac{1}{4} \quad \gamma = 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G_2(s)}{s}\right\} = \frac{1}{4}\left(1 - \cos(2t)\right)\mu(t)$$

$$\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G_2(s)}{s}\right\}\Big|_{t=kT_s}\right\} = \frac{1}{4}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z(z-\cos(2T_s))}{z^2-2z\cos(2T_s)+1}\right)$$

$$\Rightarrow G_{2d}(z) = \frac{(z+1)(1-\cos(2T_s))}{z^2-2z\cos(2T_s)+1}$$

$$A_d = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s \end{bmatrix}^{-1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix} s & 1 \\ 4 & s \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \cos(2T_s) & \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2T_s) \\ 2\operatorname{sen}(2T_s) & \cos(2T_s) \end{bmatrix}$$

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A\eta}B\,d\eta = \int_0^{T_s}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\eta) \\ \cos(2\eta) \end{bmatrix} d\eta$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\cos(2\eta) \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\eta) \end{bmatrix}\Bigg|_0^{T_s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2T_s) \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2T_s) \end{bmatrix}$$

El período de muestreo puede elegirse de manera que la frecuencia de Nyquist esté al menos una década sobre el polo o cero más rápido

~~JME – 11 de septiembre de 2016~~

$$\omega_N > 10\cdot 3 \Rightarrow \frac{\pi}{T_s} \geq 10\cdot 3 \Rightarrow \boxed{T_s \leq 0{,}1}$$

Por ejemplo $T_s = 0{,}1$

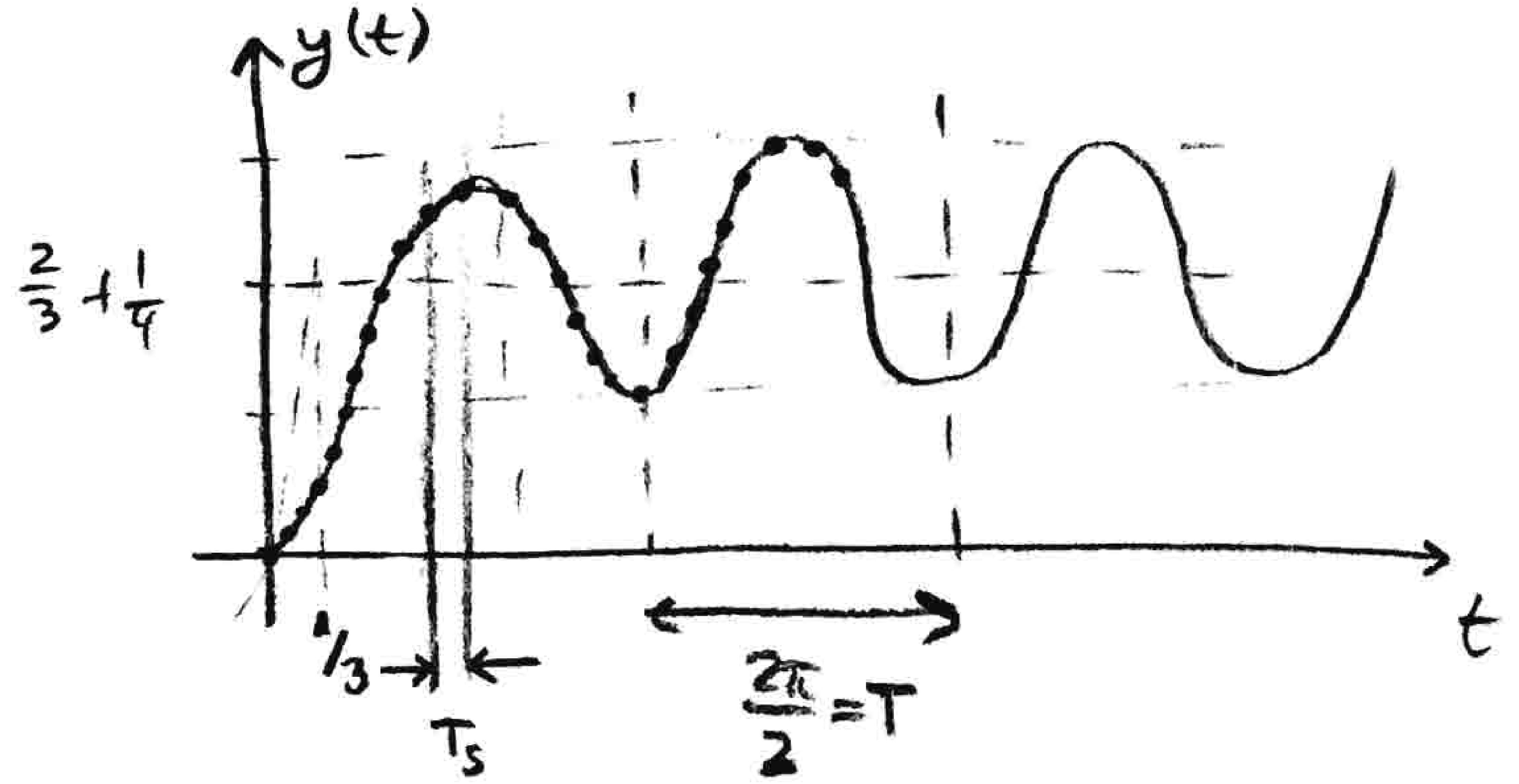
(b) Si $u[k] = \mu[k] \Rightarrow u(t) = \mu(t)$ pues se usa un ZOH

La respuesta a escalón ya fue calculada

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{G_1(s) + G_2(s)}{s} = \frac{2}{s(s+3)} + \frac{1}{s(s^2+4)}$$

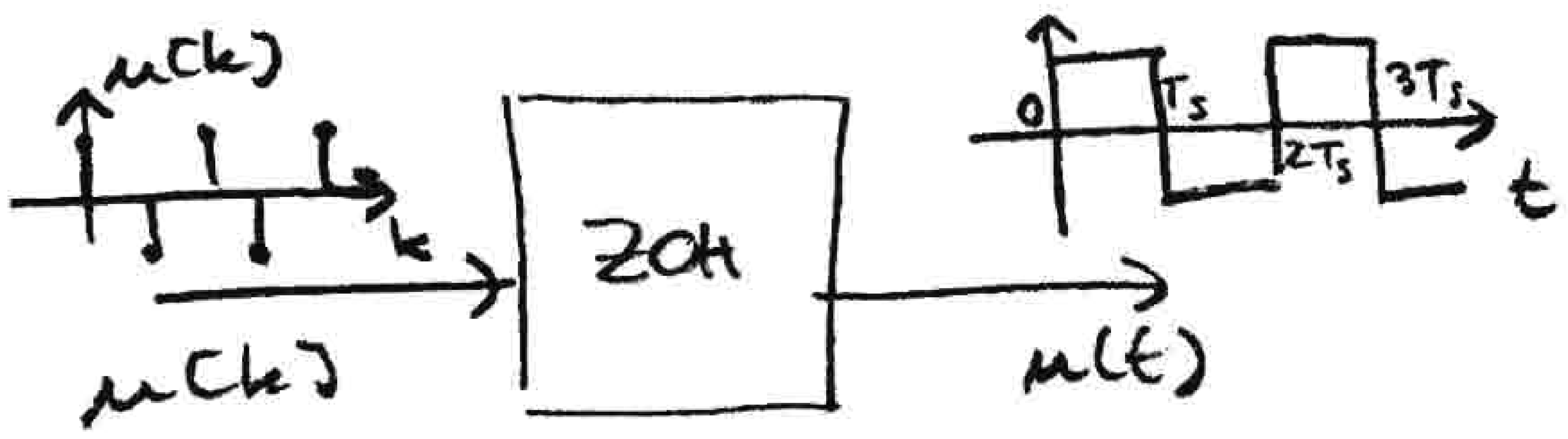
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{2}{3}\left(1 - e^{-3t}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \cos(2t)\right) \qquad t \geq 0$$

Donde se obtiene $\boxed{y[k] = y(kT_s)}$



(c) Si $u[k] = \cos(\omega T_s k)$ en que $\omega = \frac{\pi}{T_s} = \omega_N$

$\Rightarrow u[k] = \cos(k\pi) = (-1)^k$



La respuesta en frecuencia del modelo muestreado está determinada por $G_d(z)$ evaluada en $z = e^{j\omega_N T_s} = -1$

$$G_d(-1) = G_{1d}(-1) + G_{2d}(-1)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1 - e^{-3T_s}}{-1 - e^{-3T_s}}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\cancel{(-1+1)}^{\,0}\,(1 - \cos(2T_s))}{1 - 2(-1)\cos(2T_s) + 1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\frac{(e^{-3T_s} - 1)}{(e^{-3T_s} + 1)}$$