ELO370 – S2 2016 – Control #4 – 14 de noviembre de 2016

Problema 4.1 *Considere el sistema*

$$
\begin{aligned}
x[k+1] &= \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u[k] \\
y[k] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]
\end{aligned}
$$

(a) Determine si el sistema es observable y/o alcanzable.

(b) Si se hace realimentación del estado, determine el conjunto de polos de lazo cerrado obtenibles mediante una matriz de ganancia de realimentación K arbitraria.

(c) Si se utiliza un observador de orden completo, determine el conjunto de polos del observador obtenibles mediante una matriz de ganancia del observador J arbitraria.

a) La matriz de observabilidad es

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

que claramente es de rango completo, por tanto el sistema es (completamente) observable.

La matriz de controlabilidad es

$$W_c = [B \ \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que claramente es singular, por tanto el sistema no es (completamente) alcanzable.

(La matriz A además tiene autovalores 0.5 y 0.25 (sobre la diagonal) por tanto i) $A^n \neq 0 \quad \forall n$. Es decir, no hay controlabilidad

ii) Los modos no controlables ($0,25^k$) son estables. Por tanto el sistema es estabilizable.

iii) El sistema es completamente observable, por tanto, no se requiere analizar detectabilidad.)

(b) Realimentación de estado: $u = -Kx = -[k_1 \ \ k_2]\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix}$

Los polos de lazo cerrado son las raíces del polinomio característico

$$p_c(z) = \det(zI - A + BK) = \det\left(zI_2 - \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \ \ k_2] \right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} z - 0.5 + k_1 & 0.5 + k_2 \\ 0 & z - 0.25 \end{pmatrix}$$

$$= (z - 0,5 + k_1)(z - 0,25)$$

donde se aprecia que hay un polo fijo en $z = 0.25$ (es decir, NO es controlable)

y otro polo en $z = 0.5 - k_1$ (que puede ser asignado arbitrariamente en $\mathbb{R}$)

(c) El observador de orden completo es: $\hat{x}[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + J(y[k] - C\hat{x}[k])$

Sus polos son las raíces del polinomio característico

$$p_o(z) = \det(zI - A + JC) = \det\left(zI_2 - \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} [1 \ \ 0] \right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} z - 0,5 + j_1 & 0.5 \\ j_2 & z - 0.25 \end{pmatrix}$$

$$= (z - 0.5 + j_1)(z - 0.25) - 0.5 j_2$$

$$= z^2 + (j_1 - 0,75) z + 0.25(0.5 - j_1) - 0,5 j_2$$

Donde los coeficientes del polinomio (y, por tanto, sus raíces) se pueden asignar arbitrariamente.