Certamen #1 – ELO370 – S1 2022
Soluciones

Problema 1.1 (10 puntos) *Un sistema de tiempo discreto tiene una función transferencia*

$$G(z) = \frac{z+1}{z(z-a)}$$

en que $0 < a < 1$.

Determine y grafique la respuesta del sistema a un escalón unitario $\mu[k]$ *con condiciones iniciales iguales a cero.*

Solución

$$\mu[k] = \mu[k] \Rightarrow U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\Rightarrow Y(z) = G(z)U(z)$$

$$= \frac{z+1}{z(z-a)} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z+1}{(z-a)(z-1)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-1}$$

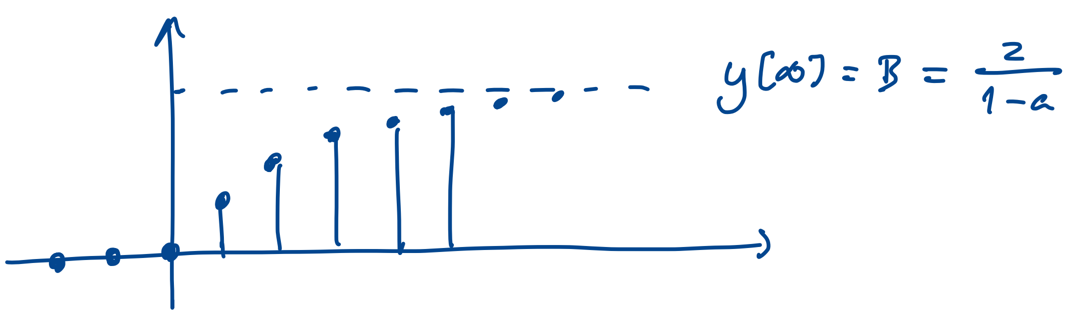
$$A = \frac{a+1}{a-1} \qquad B = \frac{2}{1-a}$$

$$\Rightarrow y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-1}\right\}$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-1}\left(A\frac{z}{z-a}\right) + z^{-1}\left(B\frac{z}{z-1}\right)\right\}$$

$$= A\, a^{k-1}\mu[k-1] + B\,\mu[k-1]$$

gráfica:



Problema 1.2 (10 puntos) *Considere el sistema de tiempo continuo*

$$G(s) = \frac{1}{s^2+\omega_o^2}$$

Grafique aproximadamente los modos naturales del modelo discreto que se obtiene utilizando la aproximación de Euler hacia adelante para la derivada, cuando se utiliza un periodo de muestreo T_s ***adecuado****.*

Solución

- Euler hacia adelante: $\quad s = \dfrac{z-1}{T_s}$

- Período de muestreo "adecuado": del orden de una década sobre la frecuencia de corte del sistema ω_o

  Por ejemplo $\omega_s = 10\,\omega_o \iff T_s = \dfrac{2\pi}{\omega_o}\cdot\dfrac{1}{10}$

  Es decir hay 10 muestras en un período de oscilación del sistema.

- Modelo aproximado:

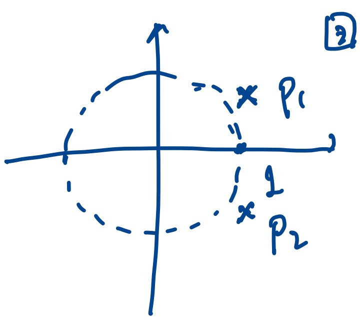
$$G_{Euler}(z) = G\left(\frac{z-1}{T_s}\right) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{T_s}\right)^2+\omega_o^2} = \frac{T_s^2}{z^2-2z+1+\omega_o^2T_s^2}$$

polos en $\quad p_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-(1+\omega_o^2T_s^2)}$

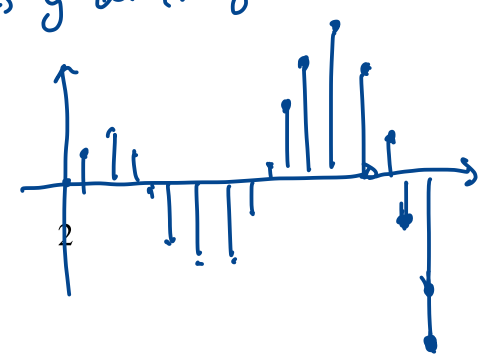
$$= 1 \pm j\,\omega_o T_s$$

Note que $|p_{1,2}| > 1$

por tanto son polos inestables que dan origen a modos naturales oscilatorios y de magnitud creciente



$\Longrightarrow$



Problema 1.3 (10 puntos) *Un sistema de tiempo continuo tiene un modelo*

$$G_o(s) = \frac{1}{s+1}$$

Se desea controlar dicho sistema con un controlador digital proporcional $C(z) = K_p$ y usando retentor de orden cero. Determine el período de muestreo T_s y el valor de K_p para que el ancho de banda del lazo cerrado sea aproximadamente de 10 [rad/s].

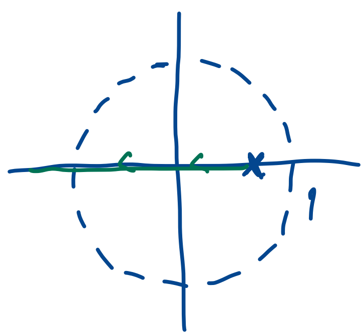
Solución

- El modelo muestreado exacto es $G_q(z) = \dfrac{1-e^{-T_s}}{z-e^{-T_s}}$

- Cerrando el lazo con un controlador $C(z) = K_p$ se obtiene un polinomio de lazo cerrado

$$A_{cl}(z) = (z - e^{-T_s}) + K_p(1 - e^{-T_s})$$

Es decir el polo de lazo cerrado está en $p = e^{-T_s} - K_p(1-e^{-T_s})$



Es decir, aumentando K_p el polo de lazo cerrado puede llevarse tan a la izquierda como sea necesario.

- Para lograr ancho de banda $10 \left[\frac{rad}{s}\right]$ ubicamos el polo de lazo cerrado en $z = e^{sT_s}\Big|_{s=-10} = e^{-10T_s}$

Por tanto queremos que $e^{-10T_s} = e^{-T_s} - K_p(1-e^{-T_s})$

$$K_p = \frac{e^{-T_s} - e^{-10T_s}}{1-e^{-T_s}}$$

Hay infinitas soluciones, pero podemos escoger $T_s = \frac{\tau}{10} = 0.1$ considerando la constante de tiempo de $G_o(s)$

$$\Rightarrow K_p = \frac{e^{-0.1} - e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

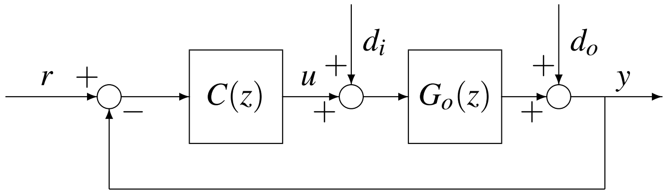


Figura 1: Diagrama de bloques de sistema discreto en lazo cerrado.

Problema 1.4 (20 puntos) *Considere el lazo de control de tiempo discreto en la Figura 1*

$$C(z) = \frac{Kz}{z-1} \qquad G_o(z) = \frac{z+1}{z(z-a)}$$

en que $0 < a < 1$.

(a) *Determine, si existe, un valor de la ganancia del controlador en el intervalo* $0 \leq K < \infty$ *tal que el lazo entre en oscilación sostenida (*Sugerencia: *use LGR + el criterio de Jury).*

(b) *Suponiendo que el lazo es estable, determine la amplitud de la actuación en estado estacionario cuando la referencia es una sinusoide de frecuencia igual a* $f_s/4$ *y de amplitud 1 (*f_s *es la frecuencia de muestreo en Hertz).*

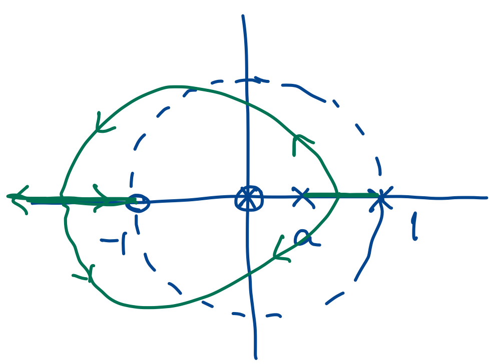
Solución

(a) El polinomio de lazo cerrado es

$$A_{cl}(z) = z(z-a)(z-1) + K z(z+1)$$
$$= z\left[\underbrace{(z-a)(z-1)}_{D(z)} + \underbrace{K}_{\lambda}\,\underbrace{(z+1)}_{N(z)}\right]$$

$D(z) + \lambda \cdot N(z)$

polos en $p_1 = 1$, $p_2 = a$ | cero en $c_1 = -1$



- Una sola asíntota en $-\pi$
- LGR parte en p_1 y p_2 $(\lambda = K = 0)$
- LGR termina en c_1 y en $-\infty$ $(K \to \infty)$
- Note que existe un K crítico
- Hay un polo de lazo cerrado fijo en $z=0$ (cancelación)

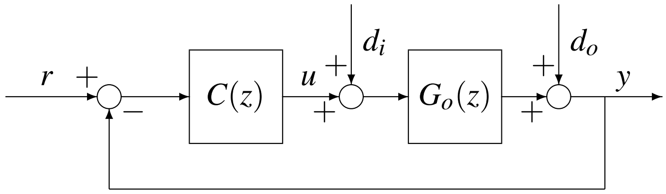


Figura 1: Diagrama de bloques de sistema discreto en lazo cerrado.

Problema 1.4 (20 puntos) *Considere el lazo de control de tiempo discreto en la Figura 1*

$$C(z) = \frac{Kz}{z-1} \qquad G_o(z) = \frac{z+1}{z(z-a)}$$

en que $0 < a < 1$.

(a) *Determine, si existe, un valor de la ganancia del controlador en el intervalo* $0 \leq K < \infty$ *tal que el lazo entre en oscilación sostenida (*Sugerencia: *use LGR + el criterio de Jury).*

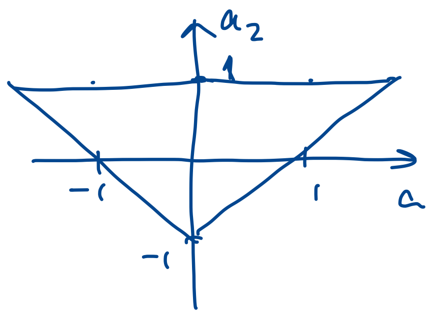
(b) *Suponiendo que el lazo es estable, determine la amplitud de la actuación en estado estacionario cuando la referencia es una sinusoide de frecuencia igual a* $f_s/4$ *y de amplitud 1 (*f_s *es la frecuencia de muestreo en Hertz).*

Solución

(a) La oscilación sostenida se produce para el K crítico en que las raíces del Acl se ubican en el círculo unitario.

$$A_{cl}(z) = z\left[(z-a)(z-1) + K(z+1)\right]$$
$$= z\left[z^2 + \underbrace{(K-a-1)}_{a_1} z + \underbrace{(a+K)}_{a_2}\right]$$

Por Jury se obtiene las condiciones del triángulo



$a_2 < 1 \iff K < 1-a$ (A)

$a_1 - 1 < a_2 \iff K - a - 2 < K + a$ (B)

$-a_1 - 1 < a_2 \iff -K + a < K + a$ (C)

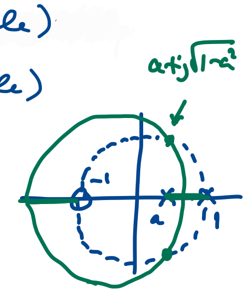
de (A) : $K < 1-a$

de (B) : $a > -1$ (se cumple)

de (C) : $K > 0$ (se cumple)

Finalmente, oscilación crítica para $K = 1-a$

$A_{cl}(z) = z\left[z^2 - 2az + 1\right] \Rightarrow$ polos en $p_1 = 0$ y $p_{2,3} = a \pm j\sqrt{1-a^2} \Rightarrow$



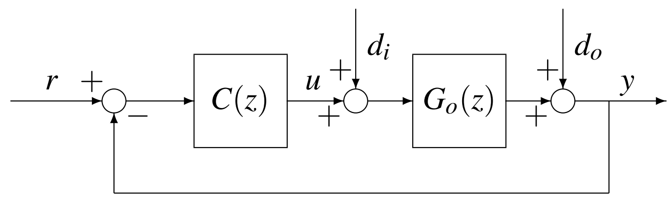


Figura 1: Diagrama de bloques de sistema discreto en lazo cerrado.

Problema 1.4 (20 puntos) *Considere el lazo de control de tiempo discreto en la Figura 1*

$$C(z) = \frac{Kz}{z-1} \qquad G_o(z) = \frac{z+1}{z(z-a)}$$

en que $0 < a < 1$.

(a) Determine, si existe, un valor de la ganancia del controlador en el intervalo $0 \leq K < \infty$ *tal que el lazo entre en oscilación sostenida (*Sugerencia: *use LGR + el criterio de Jury).*

(b) Suponiendo que el lazo es estable, determine la amplitud de la actuación en estado estacionario cuando la referencia es una sinusoide de frecuencia igual a $f_s/4$ *y de amplitud 1 (*f_s *es la frecuencia de muestreo en Hertz).*

Solución

(b) Recordar que $\frac{U}{R} = S_{uo} = \frac{C}{1+G_oC}$

en este caso $S_{uo}(z) = \dfrac{\frac{Kz}{z-1}}{1+\frac{Kz}{(z-1)}\cdot\frac{(z+1)}{(z-a)z}} = \dfrac{K(z-a)}{(z-1)(z-a)+K(z+1)}$

Para determinar la amplitud de la actuación evaluamos el módulo de $S_{uo}(z)$ en $z = e^{j\omega T_s}$ cuando $\omega = \frac{2\pi f_s}{4}$

$\Rightarrow z = e^{j\frac{\pi}{2}} = j \Rightarrow |S_{uo}(j)| = \left|\dfrac{K(j-a)}{(j-1)(j-a)+K(j+1)}\right|$

$$= \frac{K\sqrt{1+a^2}}{|j^2+(K-a-1)j+a+K|}$$

$$= \frac{K\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{(a+K-1)^2+(K-a-1)^2}} \quad //$$