Certamen #2 – ELO370 – S1 2022
Soluciones

Problema 2.1 (10 puntos) *Considere la planta en tiempo continuo*

$$G_o(s) = \frac{10}{s+10}$$

para la que se sabe que existe una perturbación de entrada $d_i(t) = \cos(t)$ y que la referencia es de tipo escalón. Diseñe un controlador $C_q(z)$ de tiempo discreto en base a la información disponible,

Solución

- Dada la información disponible diseñamos un controlador en tiempo continuo para después discretizarlo:
  - Debe ser estabilizante
  - Debe tener integración para seguir la referencia
  - Debe garantizar ancho de banda del lazo mayor que $1 \frac{rad}{s}$ o bien ser resonante, para compensar perturbación $d_i(t)$
- Considerando los requerimientos en verde, tenemos que

$$\left.\begin{array}{ll} G_o(s) \text{ es de orden} & n=1 \\ C(s) \text{ con integración} & r=1 \end{array}\right\} \; n_c = n-1+r = 1$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s} \quad (\text{es un PI})$$

- Asignación de polos: $A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s) = A_{cl}(s)$

$$\cancel{(s+10)}\, s + p_1 \cancel{(s+10)} \cdot 10 = \cancel{(s+10)}(s+5)$$

$$\Rightarrow p_1 = 1/2 \quad \Rightarrow C(s) = \frac{(s+10)}{2s}$$

- Para discretizar el controlador consideramos una frecuencia de Nyquist al menos 10 veces mayor que el ancho de banda de $G_o(s)$ $(10 \frac{rad}{s})$ y del lazo diseñado $(5 \frac{rad}{s})$:

$$\omega_N = \frac{\pi}{T_s} \geq 100 \frac{rad}{s} \Rightarrow T_s \leq 0.0314 \Rightarrow T_s = 10^{-2}$$

Podemos usar Tustin: $s = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$

$$\Rightarrow C_q(z) = C(s)\Big|_{\frac{2(z-1)}{T_s(z+1)}} = \frac{1}{2} + 10\,\frac{T_s(z+1)}{2(z-1)}$$

//

Certamen #2 – ELO370 – S1 2022
Soluciones

Problema 2.1 (10 puntos) *Considere la planta en tiempo continuo*

$$G_o(s) = \frac{10}{s+10}$$

para la que se sabe que existe una perturbación de entrada $d_i(t) = \cos(t)$ y que la referencia es de tipo escalón. Diseñe un controlador $C_q(z)$ de tiempo discreto en base a la información disponible,

Solución

⊛ Si se elige un $C(s)$ resonante: $r = 3$

$\Rightarrow n_c = n - 1 + r = 3 \Rightarrow C(s) = \dfrac{p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s\,(s^2+1)}$

Asignación de polos:

$$A_o L + B_o P = A_{cl}$$

$$(s+10)s(s^2+1) + 10(\tilde{p}_2 s^2 + \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0)(s+10) = (s+10)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(s+a)$$

$\omega_n = 5$ $\quad a = 10$

$\xi = 0.7$

$$\Rightarrow \quad C(s) = \frac{(s+10)(\tilde{p}_2 s^2 + \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0)}{s\,(s^2+1)}$$

Para discretizar se deberá usar Tustin con prewarping para $\omega_1 = 1 \left[\frac{rad}{s}\right]$ para garantizar que no hay distorsión en fase:

$$C_q(z) = C(s)\Big|_{s = \frac{\omega_1}{tg\left(\frac{\omega_1 T_s}{2}\right)} \cdot \frac{z-1}{z+1}}$$

Problema 2.2 (10 puntos) *Diseñe un controlador $C_q(z)$ de latido muerto (*dead-beat*) para la planta cuyo modelo discretizado exacto (usando ZOH y muestreo de salida instantáneo) es*

$$G_{oq}(z) = \frac{0{,}03\,z}{(z-0{,}7)(z-0{,}9)}$$

Solución

Para garantizar latido muerto podemos hacer

i) Asignación de polos en $z = 0$:

$n = 2$

$C_q(z)$ c/integración : $r = 1$

$$\left.\right\} \quad n_c = n - 1 + r = 2 \qquad C_q(z) = \frac{p_2 z^2 + p_1 z + p_0}{(z-1)(z+l_0)}$$

Forzamos cancelaciones:

$$A_o(z)\,L(z) + B_o(z)\,P(z) = A_{cl}(z)$$

$$\cancel{(z-0.7)}\cancel{(z-0.9)}(z-1)(z+l_0) + \tilde{p}_2\, 0.03\, z\, \cancel{(z-0.7)}\cancel{(z-0.9)} = \cancel{(z-0.7)}\cancel{(z-0.9)}\, z^2$$

$$(z-1)(z+l_0) + 0.03\,\tilde{p}_2\, z = z^2$$

$$\begin{cases} -1 + l_0 + 0.03\,\tilde{p}_2 = 0 \\ -l_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{p}_2 = \dfrac{1}{0.03} \\ l_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad C_q(z) = \frac{(z-0.7)(z-0.9)}{0.03\, z\,(z-1)}$$

el mismo

ii) A lo "youla" :

$$T_o \approx 1 \iff T_o(z) = G_{oq}(z)\,Q(z) = \frac{0.03\,z}{(z-0.9)(z-0.7)}\,\frac{(z-0.9)(z-0.7)}{0.03\,z^2} = z^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad C_q(z) = \frac{Q(z)}{1 - G_{oq}Q(z)} = \frac{(z-0.9)(z-0.7)}{0.03\,z^2}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Problema 2.3 (10 puntos) *Considere una planta definida en tiempo continuo por la función transferencia*

$$G_o(s) = \frac{5}{s+10}$$

La planta está sujeta a una perturbación de salida contante pero desconocida.

(a) Determine un modelo de estado ampliado en tiempo discreto para la planta y la perturbación de salida.

(b) Determine si dicho modelo es observable y/o controlable.

Solución

(a) Elegimos Ts tal que $\omega_N = \frac{\pi}{T_s} \geq 100 \Rightarrow T_s = 10^{-2}$

$$G_f(z) = \frac{1}{2}\frac{(1-e^{-10T_s})}{(z-e^{-10T_s})}$$

$$\Rightarrow \quad x[k+1] = e^{-10T_s}x[k] + \frac{1}{2}(1-e^{-10T_s})u[k]$$
$$y[k] = x[k]$$

Para la perturbación constante, pero desconocida:

$$d_o[k+1] = d_o[k]$$

$\Rightarrow$ El modelo ampliado es

$$\begin{bmatrix} x \\ d_o \end{bmatrix}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-10T_s} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_a}\begin{bmatrix} x \\ d_o \end{bmatrix}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-e^{-10T_s}) \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_a} u_k$$

$$y_k = x_k + (d_o)_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C_a}\begin{bmatrix} x \\ d_o \end{bmatrix}_k$$

Problema 2.3 (10 puntos) *Considere una planta definida en tiempo continuo por la función transferencia*

$$G_o(s) = \frac{5}{s+10}$$

La planta está sujeta a una perturbación de salida contante pero desconocida.

(a) *Determine un modelo de estado ampliado en tiempo discreto para la planta y la perturbación de salida.*

(b) *Determine si dicho modelo es observable y/o controlable.*

Solución

(b) Matriz de observabilidad

$$W_o = \begin{bmatrix} C_a \\ C_a A_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-10T_s} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det W_o \neq 0$$

$\Rightarrow$ es observable

Matriz de controlabilidad

$$W_c = \begin{bmatrix} B_a & A_a B_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-10T_s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det W_c = 0$$

$\Rightarrow$ No es controlable (alcanzable)

Problema 2.4 (10 puntos) *Considere el modelo en variables de estado*

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u[k]$$
$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]$$

(a) Determine, si es posible, la ganancia K de realimentación del estado (suponiendo que es medible) tal que los polos de lazo cerrado se ubiquen en $z = 0$.

(b) Para el diseño anterior, determine la función transferencia:

$$T_o(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$$

Solución

(a) Suponiendo que el estado es medible, los polos de lazo cerrado están dados por

$$\det(zI - A + BK) = z^2$$

Estos polos se pueden asignar si $\det W_c \neq 0$

$$W_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.75 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det W_c \neq 0$$

$$zI - A + BK = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z - 0.5 + k_1 & -0.25 + k_2 \\ k_1 & z - 0.5 + k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(zI - A + BK) = (z - 0.5 + k_1)(z - 0.5 + k_2) - k_1(k_2 - 0.25)$$
$$= z^2 + \underbrace{(k_1 - 0.5 + k_2 - 0.5)}_{0} z + \underbrace{(k_1 - 0.5)(k_2 - 0.5) - k_1(k_2 - 0.25)}_{0}$$
$$= z^2$$

Problema 2.4 (10 puntos) *Considere el modelo en variables de estado*

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}75 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u[k]$$
$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x[k]$$

(a) Determine, si es posible, la ganancia K de realimentación del estado (suponiendo que es medible) tal que los polos de lazo cerrado se ubiquen en $z = 0$.

(b) Para el diseño anterior, determine la función transferencia:

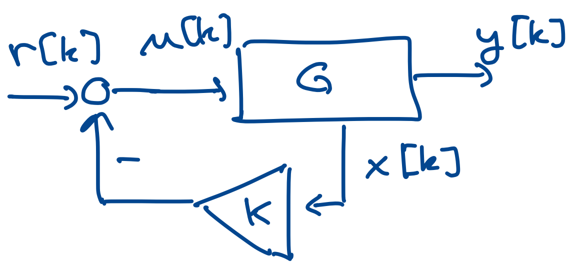
$$T_o(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$$

Solución

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 - 0.5 + k_2 - 0.5 = k_1 + k_2 - 1 = 0 \\ (k_1 - 0.5)(k_2 - 0.5) - k_1(k_2 - 0.25) = -0.5k_1 - 0.5k_2 + 0.25 + k_1 \cdot 0.25 = 0 \end{array} \right.$$

$$k_1 = 1$$
$$k_2 = 0$$

(b)



El feedback establece que $u[k] = r[k] - K x[k]$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x[k+1] = A\, x[k] + B\,(r[k] - K\, x[k]) \\ y[k] = C\, x[k] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x[k+1] = (A - BK)\, x[k] + B\, r[k] \\ y[k] = C\, x[k] \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{R(z)} = C(zI - A + BK)^{-1} B = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - 0.5 + k_2 & 0.25 - k_2 \\ -k_1 & z - 0.5 + k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{z^2}$$

$$= \frac{z - 0.25}{z^2}$$

//