

ELO370 - S1 2022 - Control #1 - 11 de abril de 2022

Problema 1.1 Considere un sistema de tiempo discreto, con entrada $u[k]$ y salida $y[k]$, está definido por el modelo en variables de estado:

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= x_2[k] \\x_2[k+1] &= 0,64x_1[k] - 1,4x_2[k] + 0,64u[k] \\y[k] &= x_1[k]\end{aligned}$$

- (a) ¿Es el sistema estable?
 (b) Determine los modos naturales
 (c) Grafique aproximadamente la respuesta a escalón unitario del sistema con condiciones iniciales cero.

Para determinar estabilidad y modos naturales determinar la función transferencia:

$$z X_1(z) = X_2(z)$$

$$z X_2(z) = 0,64 X_1(z) - 1,4 X_2(z) + 0,64 U(z)$$

$$Y(z) = X_1(z)$$

Eliminamos de estas ecuaciones $X_1(z)$ y $X_2(z)$:

$$z(zY) = 0,64 Y - 1,4(zY) + 0,64 U$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{U} = \frac{0,64}{z^2 + 1,4z - 0,64} = G(z)$$

a) Poles en $p_{1,2} = -0,7 \pm \sqrt{0,49 + 0,64} = 0,7 \pm \sqrt{1,13}$

por tanto $p_1 \approx 0,7 + 1,1 = 1,8 \leftarrow$ polo inestable
 $p_2 \approx 0,7 - 1,1 = -0,4$

Hay un polo fuera del círculo unitario, por tanto el sistema \rightarrow INESTABLE

ELO370 - S1 2022 - Control #1 - 11 de abril de 2022

Problema 1.1 Considere un sistema de tiempo discreto, con entrada $u[k]$ y salida $y[k]$, está definido por el modelo en variables de estado:

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= x_2[k] \\x_2[k+1] &= 0,64x_1[k] - 1,4x_2[k] + 0,64u[k] \\y[k] &= x_1[k]\end{aligned}$$

- (a) ¿Es el sistema estable?
 (b) Determine los modos naturales
 (c) Grafique aproximadamente la respuesta a escalón unitario del sistema con condiciones iniciales cero.

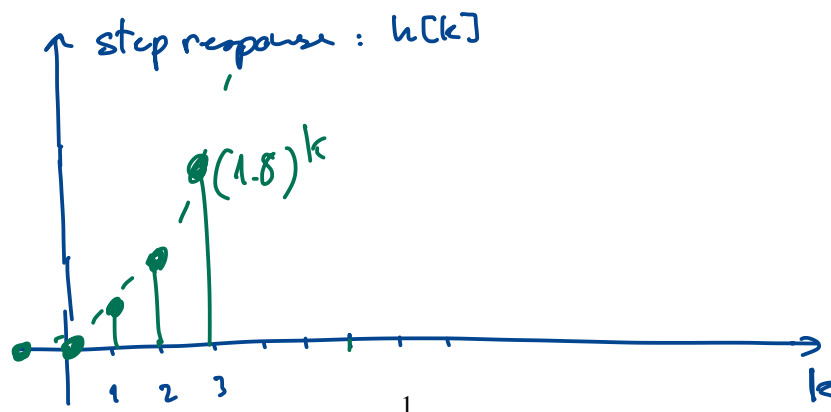
b) Los modos naturales, en el tiempo son de la forma

$$\begin{aligned}(p_1)^k &= 1,8^k \quad \leftarrow \text{creciente en el tiempo} \\(p_2)^k &= (-0,4)^k\end{aligned}$$

c) Para graficar la respuesta a escalón, tenemos los modos naturales y podemos obtener la ganancia a continua:

$$G(1) = \frac{0,64}{1 + 1,4 - 0,64} = \frac{0,64}{1,76} = \frac{8}{22} = \frac{4}{11} \approx 0,36$$

Sin embargo, el polo inestable domina la respuesta a escalón que es de la forma $C_1 (1,8)^k + C_2 (-0,4)^k + 0,36$



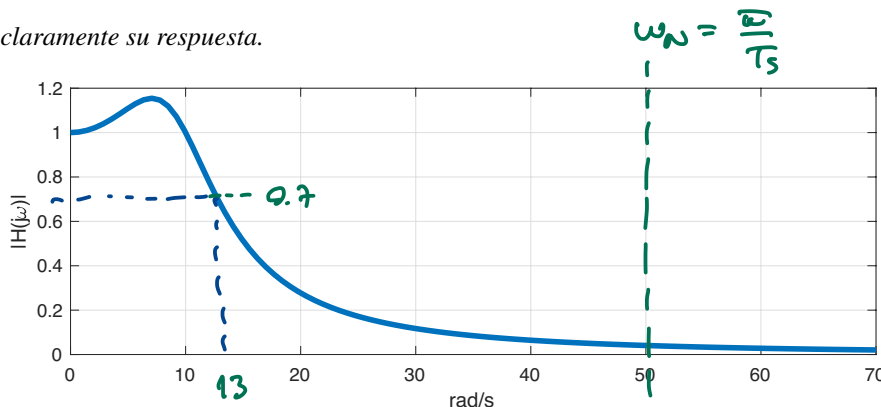
ELO370 - S1 2022 - Control #1 - 11 de abril de 2022

Problema 1.2 La figura muestra el espectro de una señal de tiempo continuo $h(t)$.

(a) Estima el ancho de banda de la señal

(b) Estime un período de muestreo adecuado para la señal.

Fundamente claramente su respuesta.



(a) El criterio usual de ancho de Banda es -3 [dB] o 70% de amplitud, que corresponde aproximadamente al 50% de la potencia. Esto es alrededor de $13 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

(b) Para muestrear adecuadamente la señal nos interesa que el espectro de la muestreo sea "similar" o representativo de la señal original.

El ancho de banda dado en (a) sí bien nos da una idea de la frecuencia de muestreo mínima, el gráfico muestra que la señal tiene contenido en frecuencias no despreciables hasta aproximadamente 50 o $60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (o incluso más allá)

$$\text{Si se elige } \frac{\pi}{T_s} \approx 50 \rightarrow T_s = \frac{\pi}{50} \approx 0.063 \text{ [s]}$$

$\frac{\pi}{T_s} = \omega_N$ es la frecuencia de Nyquist que determina la Banda para el efecto de ALIASING.