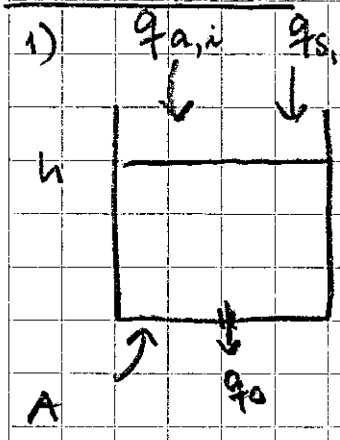
Solución Certamen Dinámica 20/12/2013

PROBLEMA 1:

1)



$q_{a,i}(t)$ caudal másico de entrada de agua

$q_{s,i}(t)$: caudal másico de entrada de soluto

$q_o(t)$: caudal másico de salida de SOLUCIÓN

a) Sea $m_a(t)$: masa de agua dentro del estanque

$$\Rightarrow \quad m_a(t) = m_a(0) + \int_0^t \left[q_{a,i}(\tau) - q_{a,o}(\tau) \right] d\tau$$

b) Sea $m_s(t)$: masa de soluto dentro del estanque

$$\Rightarrow \quad m_s(t) = m_s(0) + \int_0^t \left[q_{s,i}(\tau) - q_{s,o}(\tau) \right] d\tau$$

c) Si el soluto NO afecta el volumen, entonces este queda determinado por la masa de agua.

$$V(t) = \frac{1}{\rho_{H_2O}} m_a(t) \qquad \rho_{H_2O} = 1000 \left[\frac{kg}{m^3}\right] \text{ densidad del agua}$$

d) Suponiendo área transversal A del estanque constante.

$$h(t) = \frac{1}{A} V(t)$$

e) El caudal de salida según Bernoulli depende de la raíz de la altura

$$q_0(t) = \alpha\sqrt{h(t)}$$

f) De ese caudal, la concentración de soluto es la que determina cuánto es masa de agua y cuánto es de soluto

$$\gamma_s(t) = \frac{m_s(t)}{m_a(t) + m_s(t)}$$

$$q_{a,0}(t) = (1-\gamma_s(t))\, q_0(t)$$

$$q_{s,0}(t) = \gamma_s(t) \cdot q_0(t)$$

8 ecuaciones y 8 incógnitas: m_a m_s
$q_{a,0}$ $q_{s,0}$
V h
γ_s q_0

$q_{a,i}$ y $q_{s,i}$ son datos

2) Ecuaciones en el punto de equilibrio Q

$$(\dot{m}_a)_Q = (q_{a,i})_Q - (q_{a,o})_Q$$
$$(\dot{m}_s)_Q = (q_{s,i})_Q - (q_{s,o})_Q$$
$$(V)_Q = \frac{1}{\rho_{H_2O}} (m_a)_Q$$
$$(h)_Q = \frac{1}{A} (V)_Q$$
$$(q_o)_Q = \alpha \sqrt{(h)_Q}$$
$$(\chi_s)_Q = \frac{(m_s)_Q}{(m_a)_Q + (m_s)_Q}$$
$$(q_{a,o})_Q = (1 - (\chi_s)_Q)(q_o)_Q$$
$$(q_{s,o})_Q = (\chi_s)_Q (q_o)_Q$$

Las ecuaciones linealizadas son ...

las lineales:
$$\frac{d}{dt}(\Delta m_a) = \Delta q_{a,i} - \Delta q_{a,o}$$
$$\frac{d}{dt}(\Delta m_s) = \Delta q_{s,i} - \Delta q_{s,o}$$
$$\Delta V = \frac{1}{\rho_{H_2O}} \Delta m_a$$
$$\Delta h = \frac{1}{A} \Delta V$$

las NO lineales:
$$\Delta q_o = \alpha \frac{1}{2\sqrt{h_Q}} \Delta h$$
$$\Delta \chi_s = \frac{-(m_s)_Q}{[(m_s)_Q + (m_a)_Q]^2} \Delta m_a + \frac{(m_s)_Q + (m_a)_Q - (m_s)_Q}{[(m_s)_Q + (m_a)_Q]^2} \Delta m_s$$
$$\Delta q_{a,o} = (1 - (\chi_s)_Q) \Delta q_o - (q_o)_Q \Delta \chi_s$$
$$\Delta q_{s,o} = (\chi_s)_Q \Delta q_o + (q_o)_Q \Delta \chi_s$$

3) $$\frac{d}{dt}\Delta m_a = \Delta q_{a,i} - \left[(1-\gamma_{sQ})\,\Delta q_0 - (q_0)_Q\,\Delta\gamma_s\right]$$

$$= \Delta q_{a,i} - \left[(1-\gamma_{sQ})\frac{\alpha}{2\sqrt{h_Q}}\frac{1}{A}\frac{1}{\rho_{H_2O}}\Delta m_a - (q_0)_Q\left(\{\ \}\Delta m_a + \{\ \}\Delta m_s\right)\right]$$

Análogamente

$$\frac{d}{dt}\Delta m_s = \Delta q_{s,i} - \left[\gamma_{sQ}\,\Delta q_0 - q_{0Q}\,\Delta\gamma_s\right]$$

$$= \Delta q_{s,i} - \left[\gamma_{sQ}\frac{\alpha}{2\sqrt{h_Q}}\frac{1}{A}\frac{1}{\rho_{H_2O}}\Delta m_a - q_{0Q}\left(\{\ \}\Delta m_a + \{\ \}\Delta m_s\right)\right]$$

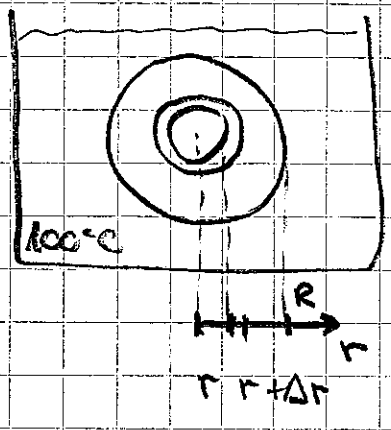
Dado que h_Q aparece en el denominador

cuando $h_Q \to 0 \Rightarrow$ el polo del sistema crece en magnitud y mantiene el signo negativo (es estable)

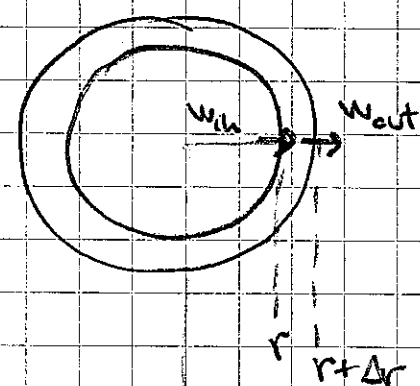
por tanto el sistema es mas "rápido" cuando el nivel de agua es cercano al fondo del estanque.

PROBLEMA 2 :

1)



- Note que hay SIMETRÍA RADIAL
- Hacemos balance de energía sobre un CASQUETE ESFÉRICO



a) Balance de energía

$$\frac{dE}{dt} = w_{in} - w_{out}$$

b) Potencia que entra

$$w_{in} = \frac{k_{papa} A(r)}{\Delta r} \left(T_{i-1}(t) - T_i(t) \right)$$

en que $T_{i-1}(t) = T(r_{i-1}, t) = T(r - \Delta r, t)$

c) Potencia que sale

$$w_{out} = \frac{k_{papa} A(r+\Delta r)}{\Delta r} \left(T_i(t) - T_{i+1}(t) \right)$$

d) $E = \Delta m \, c_{papa} T_i(t)$ $\qquad \Delta m = \Delta V \cdot \rho_{papa}$

$$\approx 4\pi r^2 \Delta r \cdot \rho_{papa}$$

k_{papa} : conductividad térmica
c_{papa} : calor específico
ρ_{papa} : densidad

2) Condiciones iniciales:

alguna distribución de temperatura

$T_i(0) = T_{ambiente}$ (para todo i)

Condiciones de Borde

Al centro de la papa no hay conducción (es decir, en el modelo anterior $W_{in}\big|_{r=0} = 0$)

Por tanto $T_0(t) - T_1(t) = 0$

o bien $\left.\dfrac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$

En el borde (o superficie) de la papa hay convección hacia el agua o bien puede suponerse que se mantiene a 100 °C

$T(R,t) = 100$ o bien $k_{papa} A(R) \left.\dfrac{\partial T}{\partial r}\right|_{R} = h_{papa} A(R) (T(R) - T_{amb})$

3) $4\pi r^2 \Delta r \, \rho c \dfrac{dT_i}{dt} = k \left[A(r) \dfrac{(T_{i-1} - T_i)}{\Delta r} \quad A(r+\Delta r) \dfrac{(T_i - T_{i+1})}{\Delta r} \right]$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(A(r) \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

$A(r) = 4\pi r^2$

PROBLEMA 3:

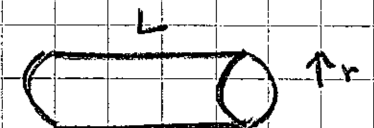
1) La tasa r_d indica cuánto disminuye la masa de la píldora en función del tiempo

Sea $m_p(t)$: masa de la píldora

$$\frac{dm_p}{dt} = -r_d$$

$$r_d = k A \left(C_s - C_{medio} \right)$$

Para modelar el área :



Podríamos suponer que sólo el radio disminuye con el tiempo

$$A(t) = 2\pi (r(t))^2 + 2\pi r(t) \cdot L$$

$$V(t) = \pi (r(t))^2 \cdot L \iff r(t) = \sqrt{\frac{1}{\pi L} V(t)}$$

Suponiendo densidad ρ de la píldora

$$V(t) = \frac{1}{\rho} m_p(t)$$

La concentración varía dependiendo de la masa que se disuelve

$$C_{medio} = \frac{m_{droga\ en\ el\ medio}(t)}{M_{medio} + m_{droga\ en\ el\ medio}(t)}$$

$$m_{droga\ en\ el\ medio}(t) = m_{droga\ en\ el\ medio}(0) + \int_0^t r_d(\tau)\, d\tau$$

2) Datos:

$k = \ldots$

$C_s = \ldots$

$L = \ldots$

$\rho = \ldots$

$M_{medio} = \ldots$

$m_p(0) = \ldots$

$m_{droga\ en\ el\ medio}(0) = \ldots$

$$V(t_k) = \frac{1}{\rho}\, m_p(t_k)$$

$$r(t_k) = \sqrt{\frac{1}{\pi L} V(t_k)}$$

$$A(t_k) = 2\pi \left(r^2(t_k) + L\, r(t_k) \right)$$

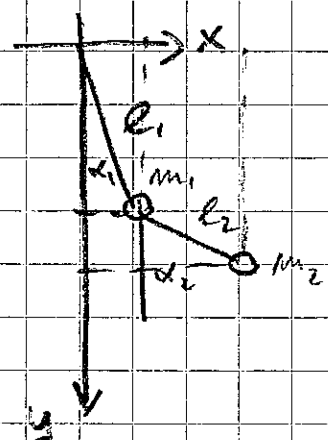
$$c_{medio}(t_k) = \frac{m_{droga\ en\ el\ medio}(t_k)}{M_{medio} + m_{droga\ en\ el\ medio}(t_k)}$$

$$r_d(t_k) = k\, A(t_k) \left[C_s - C_{medio}(t_k) \right]$$

$$m_p(t_{k+1}) \approx m_p(t_k) - \Delta t_k\, r_d(t_k)$$

$$m_{droga\ en\ el\ medio}(t_{k+1}) \approx m_{droga\ en\ el\ medio}(t_k) + \Delta t_k \cdot r_d(t_k)$$

PROBLEMA 4:



- No hay fuerzas ni torques externos
- No hay roce
- Usamos modelo de Lagrangiano

$$E_{cinético} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$x_1 = l_1 \operatorname{sen} \alpha_1$$
$$y_1 = l_1 \cos \alpha_1$$

$$x_2 = l_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + l_2 \operatorname{sen} \alpha_2$$
$$y_2 = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2$$

$$\Rightarrow v_1^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 = \left[l_1^2 \cos^2 \alpha_1 + l_1^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_1\right] (\dot{\alpha}_1)^2$$
$$= l_1^2 (\dot{\alpha}_1)^2$$

$$\Rightarrow v_2^2 = \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 = \left[l_1 \cos \alpha_1 \dot{\alpha}_1 + l_2 \cos \alpha_2 \dot{\alpha}_2\right]^2$$
$$+ \left[l_1 \operatorname{sen} \alpha_1 \dot{\alpha}_1 - l_2 \operatorname{sen} \alpha_2 \dot{\alpha}_2\right]^2$$

$$= l_1^2 (\dot{\alpha}_1)^2 + l_2^2 (\dot{\alpha}_2)^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2$$

$$E_{potencial} = - m_1 g \cos \alpha_1 - m_2 g (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$$

$$\Rightarrow \text{Lagrangiano} \quad L = E_{cinético} - E_{potencial}$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 (\dot{\alpha}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 (\dot{\alpha}_1)^2 + l_2^2 (\dot{\alpha}_2)^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2\right]$$
$$+ m_1 g \cos \alpha_1 + m_2 g (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$$

Euler Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \qquad q = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 - (m_1 + m_2) g \operatorname{sen}\alpha_1 \\ m_2 l_1 l_2 \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 - m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 \dot{\alpha}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\alpha}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\dot{\alpha}_2 \\ m_2 l_2^2 \dot{\alpha}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\dot{\alpha}_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\alpha}_1 + m_2 l_1 l_2 \frac{d}{dt}\left(\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\dot{\alpha}_2\right) =$$

$$-m_2 l_1 l_2 \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 - (m_1 + m_2) g \operatorname{sen}\alpha_1$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\alpha}_2 + m_2 l_1 l_2 \frac{d}{dt}\left(\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\dot{\alpha}_1\right) =$$

$$m_2 l_1 l_2 \operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 - m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2$$