

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

**EQUIVALENCIA ENTRE CONTROLADORES
CLÁSICOS Y CONTROL DEL ESTADO
OBSERVADO**

Juan Ignacio Yuz Eissmann

Magister en Ingeniería Electrónica

Valparaíso, Noviembre 2001.

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

**EQUIVALENCIA ENTRE CONTROLADORES
CLÁSICOS Y CONTROL DEL ESTADO
OBSERVADO**

Tesis de Grado presentada por
Juan Ignacio Yuz Eissmann

como requisito parcial para optar al título de

Ingeniero Civil Electrónico

y al grado de

Magister en Ingeniería Electrónica

Profesor Guía
Dr. Mario Salgado Brocal

Valparaíso, Noviembre 2001.

TÍTULO DE LA TESIS:

**EQUIVALENCIA ENTRE CONTROLADORES CLÁSICOS Y
CONTROL DEL ESTADO OBSERVADO**

AUTOR:

JUAN IGNACIO YUZ EISSMANN

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil Electrónico y el grado de Magister en Ingeniería Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Mario Salgado B.

Dr. Juan Hernández S.

Dr. Bernardo León de la Barra S.

Valparaíso, Chile. Noviembre de 2001.

*Dedicado a mis padres,
por su amor y por todo
lo que me han enseñado.*

*También a don Mario
y a don Viktor.*

RESUMEN

El enfoque de la teoría moderna de control lineal basa el análisis de los sistemas en su representación en variables de estado, que permite analizar sus propiedades, tales como estabilidad, controlabilidad y observabilidad, de mejor forma que los modelos mediante funciones de transferencia ([7],[5]).

Estos modelos de estado permiten el diseño de sistemas de control mediante la realimentación lineal del estado, que se estima a partir de un observador, pues las variables de estado, en general, no pueden ser medidas directamente([12],[11],[16]). La dinámica del lazo de control queda determinada en parte por el observador y en parte por la realimentación del estado de manera independiente. Esto es conocido como el Principio de Separación para los polos del lazo cerrado ([15]). Lazos de control de este tipo pueden ser diseñados de manera óptima, minimizando el efecto del ruido o la energía en la actuación sobre la planta ([10],[1],[6],[8]).

Resulta interesante la equivalencia que se establece entre el esquema de realimentación del estado observado y el esquema clásico de control por realimentación de la salida, basado usualmente en la representación mediante funciones de transferencia. Tal como puede encontrarse en la literatura([4],[5]), un esquema clásico de control de un grado de libertad siempre puede interpretarse como un lazo de realimentación del estado observado, pero bajo ciertas restricciones sobre el grado relativo del controlador ya que, cuando se utiliza un observador de orden completo, el controlador equivalente resulta estrictamente propio. Esto significa una importante limitación ya que excluye del análisis una serie de controladores importantes, tales como los de estructura PID, los de mínima complejidad, los que se utilizan en mecanismos antienrollamiento y otros.

En la presente Tesis se analiza el uso del observador de orden reducido, o de Luenberger, en un esquema de realimentación del estado observado, y su equivalencia con un lazo de control clásico.

El observador de orden reducido, como su nombre lo indica, a diferencia del observador de orden completo, no estima todos los estados del sistema, sino que aprovecha la información contenida directamente en la salida $y(t)$. Esta característica es la que permite tener un controlador equivalente bipropio o de grado relativo cero.

La principal contribución de esta Tesis es proveer una interpretación para cual-

quier lazo de control clásico con un grado de libertad como un esquema de control por realimentación del estado observado. El uso del observador de orden reducido elimina la restricción sobre el grado relativo del controlador, permitiendo que éste sea bipropio. Esto, como ya se mencionó, resulta de interés pues incluye a controladores ampliamente utilizados como los de estructura **PI** o **PID**, permitiendo una visión más profunda en el diseño y especificaciones del controlador.

El análisis incluye también el uso del observador para compensar perturbaciones en el lazo de control ([13],[14]). Cuando dichas perturbaciones son de naturaleza conocida, se pueden incorporar al modelo de la planta para estimarlas y realimentarlas de manera conveniente, lo que se denomina Principio del Modelo Interno ([3]).

Además, se presentan dos estrategias para forzar integración en el lazo de control. La primera incorpora integradores en paralelo al lazo de control original, mientras que la segunda modela perturbaciones constantes en la entrada de la planta.

Luego se analiza en detalle cómo establecer explícitamente la equivalencia entre un lazo de control clásico, en que el controlador puede ser bipropio o no, y el esquema de realimentación del estado estimado a través del observador de orden reducido. Se analiza para el caso de sistemas escalares y multivariantes, considerando lazos de control en los que el controlador es bipropio o estrictamente propio.

También se analizan las expresiones que resultan de considerar en los desarrollos realizados el caso de sistemas escalares y las simplificaciones asociadas. De igual forma se revisan las expresiones resultantes para sistemas de tiempo discreto.

A lo largo de la tesis se presentan diferentes ejemplos que permiten ilustrar los desarrollos realizados, y permiten apreciar la importancia del aporte realizado a la unificación de los enfoques clásico y moderno en el diseño y análisis de lazos de control.

Palabras claves

control clásico, realimentación del estado, observador, equivalencia, controlador bipropio, principio de separación, principio del modelo interno.

ABSTRACT

The modern approach of linear control theory is based on state space models, because they give a deeper insight into system properties such as stability, controllability and observability, than the insight provided by the transfer function approach ([7],[5]).

These models can be used in control system design using linear state feedback, where an observer provides a state vector estimation, because the state can not be easily measured ([12],[11],[16]). The closed loop dynamics is determined independently by the choice of the observer gain and the state feedback gain. This is known as Separation Principle for the closed loop poles ([15]). Also, the control loop can be designed to minimize the effect of the noise and/or the control energy over the plant input ([10],[1],[6],[8]).

It is very interesting to establish an equivalence between classical and modern approaches in control loops, that is between a one-degree-of-freedom control loop, where only transfer function models are usually considered, and an observed state feedback scheme, where state space models are used. It can be seen in literature ([4],[5]) that a classical control loop can always be interpreted as an estimated state feedback system, under certain assumptions on the controller relative degree. Indeed, if a full-order observer is used, the equivalent controller has relative degree greater or equal than one, i.e., the controller must be strictly proper. This is a significant limitation, since minimal complexity controllers, PID controllers and, in general, all controllers for which some antiwindup mechanisms are used, are left out of this treatment.

In this thesis work, a reduced-order observer (Luenberger observer) is used to estimate the plant state. The difference between this and the full order observer is that Luenberger observer extracts part of the system state directly from the measured output $y(t)$. Indeed, this yields a biproper equivalent controller, i.e., with relative degree equals to zero, this is shown in this thesis.

Then the main contribution in this thesis is the observed state feedback interpretation of any classical control loop with one degree of freedom. The reduced order observer makes restrictions to the relative degree of the controller to be unnecessary. This issue allows biproper controllers to be included in the observed state feedback

interpretation, having a deeper insight into controller design and specifications.

There are other issues, regarding state space approach, also studied in this work. Disturbances are rejected in the control loop using the state form of the Internal Model Principle ([3]), i.e., the plant state model and the disturbance state model are combined in an augmented model. The disturbance state estimates are then feed back with a suitable gain to cancel the disturbance ([13],[14]).

Also, two strategies are analyzed to force integration in the controller: first, including parallel integrators to the original control loop, and second, modelling (probably fictitious) constant disturbances on the plant input.

Given a classical control loop, a procedure is proposed to establish the equivalence between this and an observed state feedback loop, obtaining precisely the matrix gains involved. *MIMO* and *SISO* are considered, with biproper or strictly proper controllers.

Simplified expressions are also deduced for scalar systems (*SISO*) and discrete time systems.

There are several examples throughout this thesis to illustrate the concepts and the main results. They can be useful to appreciate the contribution of the equivalence of classical and modern approach in control loops analysis and design.

Keywords

classical control, state feedback, observer, equivalence, biproper controller, separation principle, internal model principle.

CONTENIDO

RESUMEN	I
ABSTRACT	III
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Representación de sistemas en variables de estado	1
1.1.1. Transformación del estado	3
1.1.2. Función de transferencia	3
1.1.3. Controlabilidad de un sistema	3
1.1.4. Observabilidad de un sistema	5
1.1.5. Realización mínima	6
1.2. Control por realimentación del estado	7
1.3. Observadores de orden completo	8
1.4. Observadores de orden reducido	10
1.5. Realimentación del estado observado	12
1.5.1. Esquema de control clásico equivalente	14
1.5.2. Esquema con integración	17
1.5.3. Modelado de perturbaciones	21
2. OBSERVADOR DE LUENBERGER Y REALIMENTACIÓN DEL ESTADO	23
2.1. Revisión del observador de orden reducido	23
2.2. Realimentación del estado mediante observador de orden reducido	28
2.2.1. Polos de lazo cerrado	29
2.2.2. Controlador equivalente	31
3. PERTURBACIONES E INTEGRACIÓN EN EL CONTROLADOR	41
3.1. Modelado de las perturbaciones	41
3.1.1. El observador de orden reducido	43
3.1.2. Realimentación del estado	45
	v

3.1.3. Controlador equivalente	46
3.1.4. Prefiltro de la referencia	48
3.1.5. Polos de lazo cerrado	49
3.2. Integración en el controlador equivalente	55
3.2.1. Integradores en paralelo	56
3.2.2. Modelado de perturbaciones constantes	67
4. CONTROL CLÁSICO Y REALIMENTACIÓN DEL ESTADO	75
4.1. Limitaciones	76
4.2. Caso general para sistemas escalares (<i>SISO</i>)	76
4.3. Caso general para sistemas multivariables (<i>MIMO</i>)	92
5. SISTEMAS ESCALARES Y DE TIEMPO DISCRETO	107
5.1. Reducción de las expresiones para sistemas escalares	107
5.1.1. La planta	107
5.1.2. El observador de orden reducido	108
5.1.3. La realimentación del estado	109
5.1.4. El controlador equivalente	110
5.1.5. Esquema con integración	110
5.2. Expresiones para sistemas de tiempo discreto	112
5.2.1. La planta	112
5.2.2. El observador de orden reducido	112
5.2.3. Realimentación del estado observado	113
5.2.4. El controlador equivalente	114
5.2.5. Esquema con integración	115
6. CONCLUSIONES	119
A. PROPIEDADES DE MATRICES Y DETERMINANTES	123
A.1. Lema de inversión matricial	123
B. MODELOS EN VARIABLES DE ESTADO	127
B.1. Interconexión de sistemas	127
B.2. Inverso de un sistema	129
BIBLIOGRAFÍA	131

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se abordan los principales temas en los que se basa el trabajo de tesis detallado más adelante.

En primer lugar, se hace referencia a los modelos en variables de estado y sus ventajas respecto a la representación a través de funciones de transferencia.

A continuación se analiza el método de control por realimentación del estado y su efecto sobre la dinámica de lazo cerrado, considerando que se dispone de una medición perfecta del estado de la planta.

Esta última suposición no es muy realista, por lo cual se introduce la idea de utilizar un observador que, a partir de las señales de entrada y salida disponibles, estime el estado de la planta. Se revisan dos tipos de observadores: el de orden completo, en que se estima todo el estado en base a mediciones de entrada y salida, y el de orden reducido, o de Luenberger, el cual estima sólo una parte del estado, mientras que la restante se obtiene directamente a partir de la salida de la planta. El observador de orden completo es el más ampliamente difundido y ha sido empleado en múltiples aplicaciones.

Posteriormente se analiza el paralelo que existe entre el control por realimentación del estado, estimado a través de un observador, y el esquema clásico de control con un grado de libertad, en que el controlador y la planta se representan, por lo general, mediante su función de transferencia.

1.1. Representación de sistemas en variables de estado

El enfoque clásico de la teoría de control hace uso de la información proporcionada por la función de transferencia de un sistema, que es la transformada de Laplace de su salida cuando en la entrada se introduce un impulso o Delta de Dirac unitario, con condiciones iniciales iguales a cero.

$$\mathbf{G}_0(s) = \mathcal{L}[y(t)] \Big|_{\{u(t)=\delta(t), c.i.=0\}} \quad (1.1.1)$$

Este modelo del sistema permite analizar características del sistema tales como su estabilidad y velocidad, lo cual permite sintetizar algún controlador que estabilice el esquema de control de lazo cerrado que se aprecia en la Figura 1.4 en la página

14, que también se expresa mediante su función de transferencia. Para sistemas multivariantes (*MIMO*), en que se tienen varias variables de entrada y de salida, se obtienen matrices de transferencia para el controlador y la planta, manteniéndose la estructura del lazo de control realimentado.

El enfoque de la llamada teoría moderna de control¹ se basa en los modelos en variables de estado, que ha mostrado ser más útil, pues permite un análisis más profundo de las propiedades de un sistema dado. Además, la representación en variables de estado permite la descripción completa del sistema, en contraposición al enfoque basado en funciones de transferencia, donde sólo se describe la parte completamente controlable y completamente observable. Esto ha dejado de manifiesto algunas limitaciones de las funciones de transferencia para el análisis de sistemas, principalmente porque este tipo de modelos expresa solo las propiedades de entrada-salida de un sistema, tales como estabilidad, velocidad, respuesta en frecuencia, y otras propiedades y limitaciones fundamentales producto de la ubicación de los ceros y polos. Por último, la descripción en variables de estado permite tratar de manera unificada tanto los sistemas escalares como los sistemas multivariantes.

Los modelos en espacio de estado son una descripción de un sistema en términos de variables fundamentales que, conocido su valor presente y el valor de las señales que actúen como entrada, permiten predecir el comportamiento futuro del sistema. Esto se refiere a poder conocer tanto sus variables de salida como la evolución de las mismas variables de estado. Esta descripción consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para sistemas continuos:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.1.2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.1.3)$$

y en un sistema de ecuaciones recursivas de un paso adelante, para sistemas definidos en tiempo discreto:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] \quad (1.1.4)$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}\mathbf{u}[k] \quad (1.1.5)$$

en que, en que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida, y las matrices de la representación de estado son de las dimensiones correspondientes:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad ; \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad ; \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad ; \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (1.1.6)$$

Los sistemas físicos reales por lo general no tienen paso directo, es decir, no es posible tener un efecto instantáneo de las variables de entrada sobre sus salidas.

¹La teoría moderna del control se reconoce usualmente como el desarrollo teórico que se inició a comienzos de los años 60, a partir del trabajo pionero de R.Kalman

Esto se traduce en funciones de transferencia estrictamente propias, en que el grado del denominador es mayor que el grado del numerador. En el caso de modelos en variables de estado, significa que la matriz \mathbf{D} es la matriz nula, es decir, tanto para tiempo continuo como discreto, se tiene $\mathbf{D} = 0$.

1.1.1. Transformación del estado

La elección del vector de estado de un sistema no es única, y no necesariamente las variables que lo forman corresponden a variables físicas reales del sistema. Se presenta el siguiente Lema, que se aplica tanto a sistemas de tiempo continuo como a sistemas de tiempo discreto:

Lema 1. *Dado un sistema con su representación de estado formada por las matrices $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ y una transformación lineal del estado $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}$, en que \mathbf{T} es no singular, la nueva representación está dada por las matrices $\{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}}\}$, en que*

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1} \quad (1.1.7)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} \quad (1.1.8)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}^{-1} \quad (1.1.9)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad (1.1.10)$$

□□□

1.1.2. Función de transferencia

La función de transferencia se puede obtener a partir del modelo de estado de un sistema, aplicando la Transformada de Laplace a las ecuaciones (1.1.2)-(1.1.3) y eliminando $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}(t)]$ de ellas. Esto da como resultado el Lema que se muestra a continuación:

Lema 2. *Dado el modelo de un sistema de tiempo continuo (1.1.2)-(1.1.3), su función de transferencia está dada por*

$$\mathbf{G}_o(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.1.11)$$

□□□

1.1.3. Controlabilidad de un sistema

Una cuestión muy importante que nos interesa en sistemas de control es cuando es posible o no llevar el vector de estado a un punto específico del espacio de estado, a través de las señales de entrada al sistema. Debemos recordar que el estado de un sistema a menudo está formado por algunas de sus variables internas, como temperatura, presión o el nivel de algún estanque, que pueden ser críticas e interesa mantenerlas controladas entre algunos valores específicos. Esta noción de controlabilidad se puede formalizar de la siguiente forma:

Definición 1. Un estado \mathbf{x}_0 se dice **controlable** si existe un intervalo de tiempo finito $[0, T]$ y una entrada $\{\mathbf{u}(t), t \in [0, T]\}$ tal que $\mathbf{x}(T) = 0$. Si todos los estados son controlables, entonces se dice que el sistema es **completamente controlable**.

Teorema 1. Considere el modelos de estado lineal e invariante en el tiempo, donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.1.12)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.1.13)$$

i) El conjunto de todos los estados controlables es el **espacio rango** de la matriz de controlabilidad $\Gamma_c[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ donde

$$\Gamma_c[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \triangleq [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (1.1.14)$$

ii) El modelo es completamente controlable si y sólo si $\Gamma_c[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ tiene **rango fila completo**.

En el caso que un sistema no sea completamente controlable, este puede **descomponerse** un subsistema controlable y uno completamente incontrolable de la siguiente forma

Lema 3. Considere un sistema para el cual $\text{rango}\{\Gamma_c[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\} = k < n$, entonces existe una transformación de similaridad \mathbf{T} tal que $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x}$,

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}; \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \quad (1.1.15)$$

y $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$ tiene la forma

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_c & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{nc} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.1.16)$$

donde $\bar{\mathbf{A}}_c$ tiene dimensión k y $(\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{B}}_c)$ es completamente controlable.

□□□

Este resultado establece cuáles estados pueden y cuáles no pueden ser llevados a cero. Para apreciar mejor este hecho, el estado y la salida se expresan en la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_c \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_c & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (1.1.17)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_c & \bar{\mathbf{C}}_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{nc} \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1.1.18)$$

El **subespacio controlable** del modelo en variables de estado está compuesto por todos los estados generados como combinación de los estados en $\bar{\mathbf{x}}_c$. La estabilidad de este subespacio está determinada por la ubicación de los autovalores de la matriz $\bar{\mathbf{A}}_c$.

Por otra parte, el **subespacio no controlable** está formado por todos los estados generados como combinación lineal de los estados en $\bar{\mathbf{x}}_{nc}$. La estabilidad de este subespacio queda determinada por los autovalores de la matriz $\bar{\mathbf{A}}_{nc}$.

De esta forma, la entrada no tiene efecto alguno sobre el subespacio no controlable, por lo que podríamos esperar que este subespacio fuera al menos estable, de manera que sus estados decaigan naturalmente al origen. En este caso el modelo en variables de estado se denomina **estabilizable**.

1.1.4. Observabilidad de un sistema

Si se observa el modelo de estado de un sistema dado, se aprecia que la salida de éste depende directamente del estado, por tanto se podría suponer que si se observa esta salida durante un intervalo de tiempo, entonces se podría obtener información sobre el vector de estado. La propiedad asociada a esta idea se denomina observabilidad, y puede formalizarse de la siguiente forma:

Definición 2. El estado $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ se dice **no observable** si dado $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, y $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ para $t \geq 0$, entonces $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ para $t \geq 0$, i.e., no se aprecia efecto alguno de \mathbf{x}_0 sobre la salida del sistema.

El sistema se dice **completamente observable** si no existe estado inicial, diferente de cero, que sea no observable.

Teorema 2. Considere el sistema en variables de estado, continuo, lineal e invariante en el tiempo, donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.1.19)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.1.20)$$

i) El conjunto de estados no observables es igual al subespacio nulo de la matriz de observabilidad $\Gamma_o[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ donde

$$\Gamma_o[\mathbf{A}, \mathbf{C}] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.1.21)$$

ii) El sistema es completamente observable si y solo si $\Gamma_o[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ tiene **rango columna completo** n .

En forma análoga a lo que sucede con la controlabilidad de los estados de un sistema, pueden existir algunos de ellos que sean observables y otros que no lo sean, es decir, la salida del sistema no aporta información sobre ellos. Esto se manifiesta en el Lema siguiente, que resulta ser el *dual* del Lema 3:

Lema 4. *Si $\text{rango}\{\Gamma_o[\mathbf{A}, \mathbf{C}]\} = k < n$, existe una transformación de similaridad \mathbf{T} tal que $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$, $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$, entonces $\bar{\mathbf{C}}$ y $\bar{\mathbf{A}}$ toman la forma*

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_o & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{no} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{C}} = [\bar{\mathbf{C}}_o \quad 0] \quad (1.1.22)$$

donde $\bar{\mathbf{A}}_o$ tiene dimensión k y el par $(\bar{\mathbf{C}}_o, \bar{\mathbf{A}}_o)$ es completamente observable.

El estado (transformado) y las ecuaciones de salida se pueden expresar en la forma particionada que se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_o(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{no}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_o & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{no} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_o(t) \\ \bar{\mathbf{x}}_{no}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_o \\ \bar{\mathbf{B}}_{no} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (1.1.23)$$

$$\mathbf{y}(t) = [\bar{\mathbf{C}}_o \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_o(t) \\ \bar{\mathbf{x}}_{no}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.1.24)$$

La descripción anterior pone en evidencia el problema que puede surgir cuando se intenta controlar un sistema usando sólo su salida, pues en ésta no aparece información alguna sobre el estado $\bar{\mathbf{x}}_{no}[t]$.

El **subespacio observable** de un modelo es el espacio formado por todos los estados que se generan como combinaciones lineales de los estados en $\bar{\mathbf{x}}_o$. La estabilidad de este subespacio queda determinada por la ubicación de los autovalores de la matriz $\bar{\mathbf{A}}_o$.

El **subespacio no observable** de un modelo, es el espacio formado por todos los estados generados como combinación lineal de los estados en $\bar{\mathbf{x}}_{no}$. La estabilidad de este subespacio queda determinada por los autovalores de la matriz $\bar{\mathbf{A}}_{no}$.

Si el subespacio no observable es estable, decimos que el sistema es **detectable**.

El modelo de estado de un sistema proporciona más información de la que entrega la función de transferencia. Por ejemplo, propiedades como la controlabilidad y observabilidad de los estados de un sistema, que se reflejan en los modos naturales que aparecen en sus señales, sólo pueden apreciarse a partir de su modelo de estado.

1.1.5. Realización mínima

Si se observan las ecuaciones (1.1.17)-(1.1.18) y (1.1.23)-(1.1.24), se puede ver que al introducirlos en la ecuación (1.1.11), la función de transferencia del sistema sólo reflejará su parte completamente controlable y completamente observable. Esto equivale a cancelaciones entre polos y ceros en la función de transferencia. En consecuencia, pueden existir autovalores de la matriz \mathbf{A} en (1.1.2), que **no** son polos de la función de transferencia de la planta.

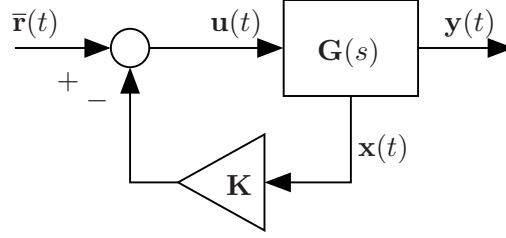


Figura 1.1. Control por realimentación del estado

La representación de estado de un sistema que contiene solamente a todos sus estados completamente controlables y observables se denomina **realización mínima**, y en este caso el conjunto de polos de la función de transferencia es igual al conjunto de autovalores de la matriz \mathbf{A} en (1.1.2).

Además de lo anterior, respecto a estas mismas propiedades de controlabilidad y observabilidad, el modelo en variables de estado de un sistema permite medir el grado de controlabilidad y observabilidad de los diferentes estados a través de los *gramianos*. Más referencias sobre estos temas se pueden ver en [5].

1.2. Control por realimentación del estado

Interesa ahora poder controlar un sistema, a partir del vector de estado $\mathbf{x}(t)$. Esta suposición por lo general no es realista, pues en sistemas reales es difícil contar con mediciones sobre todas las variables de estado de un sistema, ya sea por problemas prácticos, económicos o porque las variables de estado elegidas en el modelo no tienen contraparte en el sistema físico real.

En esta sección se aborda el problema de la realimentación del estado, dejando para las siguientes la idea estimar el estado a través de un observador.

En el esquema de control de la Figura 1.1, el estado de la planta es realimentado linealmente a la entrada a través de una matriz de ganancia \mathbf{K} . Si la planta es de orden n con m entradas y salidas, entonces:

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (1.2.1)$$

donde $\bar{\mathbf{r}}(t)$ es una señal externa, cuyo significado se aclarará más adelante.

Lema 5. *Se considera el sistema de orden n , con m entradas y salidas, definido por su representación en variables de estado:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.2.2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (1.2.3)$$

donde el estado se realimenta según el esquema de la Figura 1.1. En este caso, el polinomio característico de lazo cerrado es

$$A_{cl}(s) = F(s) = \det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \quad (1.2.4)$$

Además, si el par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) es completamente controlable, entonces las raíces del sistema global pueden ser ubicadas arbitrariamente eligiendo la matriz de ganancia \mathbf{K} .

□□□

Note que la ecuación (1.2.4) entrega n polos de lazo cerrado, mientras que para determinar la matriz \mathbf{K} deben elegirse $n \cdot m$ coeficientes. Por tanto, para sistemas multivariables, en que $m > 1$, existen grados de libertad en el cálculo de \mathbf{K} , los cuales pueden ser utilizados para que la asignación de los polos sea robusta respecto a variaciones en la matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{K} ([9],[2]).

1.3. Observadores de orden completo

En la sección anterior se propuso el esquema de control por realimentación del estado, suponiendo que el estado de la planta $\mathbf{x}(t)$ se encuentra disponible. Sin embargo, esta suposición no es real en la práctica, pues requiere sensores para las variables de estado del sistema, en el caso que éstas sean medibles. Usualmente se tiene acceso sólo a algunas de estas variables, pues incluso puede que parte del vector de estado no corresponda a variables reales del sistema físico, sino que son producto de la manipulación algebraica del modelo del sistema.

Es por esto que en esta sección y la siguiente se considera que las únicas señales disponibles del sistema son la entrada $\mathbf{u}(t)$ y la salida $\mathbf{y}(t)$, y a partir de ellas y del modelo del sistema se intenta hacer una estimación del vector de estado $\mathbf{x}(t)$. La estimación del estado se realiza a través de un sistema que replica a la planta verdadera, pero incluye un término que corrige la estimación del estado en base a la salida medida.

Si se considera un sistema de orden n , con m entradas y salidas, definido por las ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \quad (1.3.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) \quad (1.3.2)$$

entonces la forma general de un observador lineal es

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Bu}(t) + \mathbf{J}(\mathbf{y}(t) - \underbrace{\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)}_{\hat{\mathbf{y}}(t)}) \quad ; \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (1.3.3)$$

donde \mathbf{J} se denomina la **ganancia del observador**, $\hat{\mathbf{x}}(t)$ es el **estado estimado** y $\hat{\mathbf{y}}(t)$ es la salida estimada a partir de éste.

El sistema definido en la ecuación (1.3.3) se denomina **observador de orden completo**, pues hace una estimación de **todos** los estados de la planta a partir de sus señales de entrada y salida. En la sección siguiente se presenta el observador de orden reducido que obtiene parte de los estados directamente a partir de la salida $\mathbf{y}(t)$, estimando sólo los restantes. En ambos casos el observador se puede representar como el esquema de la Figura 1.2, en que las entradas son la entrada $\mathbf{u}(t)$ y la salida $\mathbf{y}(t)$ del sistema *observado* y la salida es el estado estimado $\hat{\mathbf{x}}(t)$.

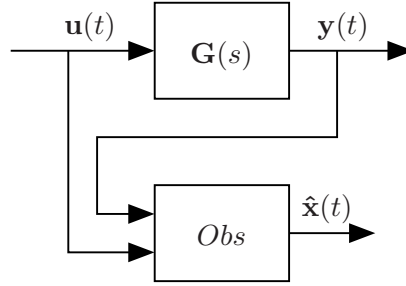


Figura 1.2. Observador del estado de un sistema

La ganancia del observador \mathbf{J} tiene un importante efecto en la velocidad con que el observador es capaz de estimar correctamente los estados de la planta, tal como se establece en el siguiente Lema:

Lema 6. *Dado un sistema definido en variables de estado por las ecuaciones (1.3.1)-(1.3.2) y el observador asociado definido en (1.3.3), entonces el error de estimación*

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (1.3.4)$$

tiene una dinámica dada por la ecuación

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{JC})\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (1.3.5)$$

Además, si el par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) es completamente observable, entonces los autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{JC}$ pueden situarse arbitrariamente en el plano complejo, a través de una elección adecuada de la matriz de ganancia \mathbf{J} .

□□□

La ecuación que define al observador (1.3.3), puede reescribirse como:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{JC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Bu}(t) + \mathbf{Jy}(t) \quad (1.3.6)$$

donde se aprecia más claramente que los polos del observador son los autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{JC}$, es decir, las soluciones de la ecuación

$$E(s) = \det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{JC}) = 0 \quad (1.3.7)$$

La ecuación (1.3.6) permite apreciar que el observador es una caja con dos entradas y una salida, como se representó en la Figura 1.2. Esto permite separar los efectos de las mediciones de la entrada y de la salida de la planta sobre la estimación del estado, como se muestra en el siguiente Lema ([5]):

Lema 7. *Si se considera el observador de orden completo definido por la ecuación (1.3.3), entonces la transformada de Laplace del estado observado puede expresarse como:*

$$\hat{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{T}_1(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{T}_2(s)\mathbf{Y}(s) \quad (1.3.8)$$

en que las matrices de transferencia involucradas son:

$$\mathbf{T}_1(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{JC})^{-1}\mathbf{B} \quad (1.3.9)$$

$$\mathbf{T}_2(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{JC})^{-1}\mathbf{J} \quad (1.3.10)$$

□□□

Se debe notar que las funciones de transferencia $\mathbf{T}_1(s)$ y $\mathbf{T}_2(s)$ tienen por denominador el mismo polinomio $E(s)$ definido en (1.3.7), que define los polos del observador. Por lo general, es conveniente elegir estos polos de manera que sean más rápidos que los modos naturales del sistema cuyo estado se observa. Sin embargo, al aumentar la velocidad de convergencia del error de estimación a cero, aumenta también la sensibilidad al ruido presente en las señales de entrada y salida, como puede deducirse de las ecuaciones (1.3.8)-(1.3.10).

1.4. Observadores de orden reducido

En la sección anterior se mostró de qué forma, considerando las señales de entrada $\mathbf{u}(t)$ y de salida $\mathbf{y}(t)$, el observador de orden completo entrega una estimación del vector de estado $\mathbf{x}(t)$ del sistema. A continuación se presenta el observador de orden reducido, en un desarrollo extractado de [10].

Si se consideran las m salidas de un sistema, expresadas en el vector $\mathbf{y}(t)$, éstas equivalen a m ecuaciones que relacionan las componente del estado $\mathbf{x}(t)$ con este vector. Si el sistema es completamente observable, queda asegurada la independencia lineal de estas m ecuaciones, pues la matriz \mathbf{C} en la matriz de observabilidad $\mathbf{\Gamma}_o$ (ecuación (1.1.21) en la página 5), debe ser de rango completo.

Esta observación sugiere la idea de aprovechar la información contenida en la salida para obtener directamente m de los n estados, quedando por estimar sólo los restantes $n - m$ estados del sistema.

Para tener n salidas linealmente independientes que permitan despejar directamente el estado del sistema podríamos definir una salida *virtual* $\mathbf{p}(t)$ tal que:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{C}'\mathbf{x}(t) \quad ; \mathbf{C}' \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n} \quad (1.4.1)$$

donde la matriz \mathbf{C}' debe garantizar la independencia lineal entre las salidas *virtuales* $\mathbf{p}(t)$ y las realmente medidas $\mathbf{y}(t)$. Es decir, debe ser posible hacer la inversión:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix} \quad (1.4.2)$$

En consecuencia, la condición necesaria para definir \mathbf{C}' es:

$$\det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \end{bmatrix} \right) \neq 0 \quad (1.4.3)$$

La expresión para el estado en la ecuación (1.4.2) se puede reescribir como:

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{L}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{L}_2 \mathbf{p}(t) \quad (1.4.4)$$

De esta forma, el estado $\mathbf{x}(t)$ será estimado haciendo una estimación de la variable $\mathbf{p}(t)$:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{L}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{L}_2 \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (1.4.5)$$

Para hacer una estimación de la variable virtual $\mathbf{p}(t)$ podemos observar que satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(t) &= \mathbf{C}' \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{C}' \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ &= \mathbf{C}' \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \mathbf{p}(t) + \mathbf{C}' \mathbf{A} \mathbf{L}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{C}' \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Por tanto se podría usar esta ecuación para obtener un observador agregándole un término $\mathbf{J}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t))$. Sin embargo, haciendo esto se obtiene:

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{y}(t) - \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{L}_1}_{\mathbf{I}} \mathbf{y}(t) - \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{L}_2}_{\mathbf{0}} \hat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t) = 0 \quad (1.4.7)$$

lo que indicaría que no hay información en $\mathbf{y}(t)$ que permita hacer una corrección en $\hat{\mathbf{p}}(t)$. Sin embargo, si se deriva la salida de la planta, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_2 \mathbf{p}(t) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_1 \mathbf{y}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

donde, combinando las ecuaciones (1.4.6) y (1.4.8) de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) = & \mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{L}_2\mathbf{p}(t) + \mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{L}_1\mathbf{y}(t) + \mathbf{C}'\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ & + \mathbf{J}(\dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_2\hat{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_1\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(t))\end{aligned}\quad (1.4.9)$$

y definiendo una nueva variable:

$$\mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{J}\mathbf{y}(t) \quad (1.4.10)$$

la ecuación (1.4.6) se puede escribir como una nueva ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}(t) = & [\mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{L}_2 - \mathbf{J}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_2]\mathbf{q}(t) + [\mathbf{C}'\mathbf{B} - \mathbf{J}\mathbf{C}\mathbf{B}]\mathbf{u}(t) \\ & + [\mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{L}_2\mathbf{J} + \mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{L}_1 - \mathbf{J}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_1 - \mathbf{J}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_2\mathbf{J}]\mathbf{y}(t)\end{aligned}\quad (1.4.11)$$

En tanto, la ecuación (1.4.5) se puede reescribir en términos de $\mathbf{q}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{L}_2\mathbf{q}(t) + (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2\mathbf{J})\mathbf{y}(t) \quad (1.4.12)$$

1.5. Realimentación del estado observado

Una vez acotado el problema de disponer del estado de una planta a través del uso de un observador, el escenario es más realista para utilizar un esquema de control basado en la realimentación del estado. Por esto, el esquema de la Figura 1.1 se reemplaza por el de la Figura 1.3, que incorpora a un observador, cuyas entradas son $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ y su salida es la estimación del estado de la planta $\hat{\mathbf{x}}(t)$. En esta sección se analiza el caso en que el observador es de orden completo, mientras que el caso en que en el esquema de la Figura 1.3 el estado del sistema se estima mediante un observador de orden reducido se analiza en la Sección §2.2. Éste último caso es el principal objeto de estudio de esta tesis.

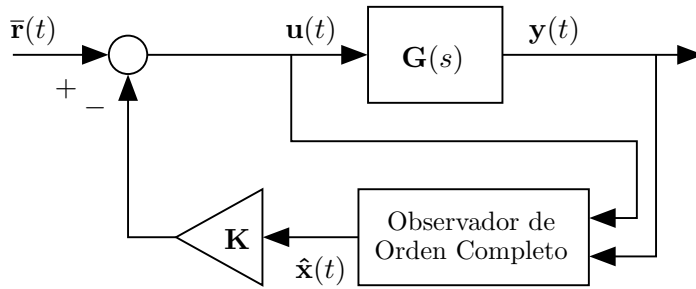


Figura 1.3. Realimentación del estado observado.

En la Figura 1.3 se observa que la actuación sobre la entrada de la planta queda definida por la ecuación:

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (1.5.1)$$

en que $\bar{\mathbf{r}}(t)$ es la señal exógena que, como se verá más adelante, puede corresponder a la referencia filtrada de un lazo de control clásico equivalente.

Los polos del lazo cerrado de la Figura 1.1 pueden obtenerse a partir del **Principio de Separación** que se detalla en la forma del siguiente Lema:

Lema 8. Principio de Separación.

Se considera el sistema definido por las ecuaciones (1.3.1)-(1.3.2), en que el par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) es completamente controlable y el par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) es completamente observable. Si se aplica la realimentación definida por la ecuación (1.5.1), en que el estado se estima mediante el observador de orden completo asociado, definido en (1.3.3), entonces:

(i) *Los polos de lazo cerrado pueden descomponerse como*

$$A_{cl}(s) = \underbrace{\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK})}_{F(s)} \cdot \underbrace{\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{JC})}_{E(s)} \quad (1.5.2)$$

Es decir, son los polos que resultan de la realimentación del estado verdadero más los polos que determina el observador del estado.

(ii) *El error en la estimación del estado de la planta $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ no es controlable desde la señal de entrada al lazo cerrado $\bar{\mathbf{r}}(t)$.*

Demostración

De las ecuaciones (1.3.5), (1.3.1) y (1.5.1) podemos describir el lazo cerrado mediante las ecuaciones:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{JC})\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (1.5.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{B}[\bar{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)] \\ &= \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{B}[\bar{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{K}(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t))] \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir de manera conjunta como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{JC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{r}}(t) \quad (1.5.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (1.5.6)$$

Esta expresión en variables de estado del sistema en lazo cerrado es la que permite demostrar el lema propuesto, ya que

- (i) los polos de lazo cerrado están dados por los autovalores de la matriz triangular definida por bloques, lo que corresponde exactamente a la ecuación (1.5.2), y
- (ii) la señal de entrada al lazo $\bar{\mathbf{r}}(t)$ no afecta en modo alguno a $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, que corresponde al error de estimación de la planta, lo que significa que esta parte del vector de estado es no controlable, como puede verse al comparar la ecuación (1.5.5) con la forma (1.1.17) en la página 4.

□□□

Es importante notar que en la ecuación (1.5.2) de los $2n$ polos de lazo cerrado:

- n quedan determinados exclusivamente por la ganancia \mathbf{K} de la realimentación del estado, en el polinomio $F(s)$, mientras que los
- n polos restantes quedan determinados por la ganancia \mathbf{J} del observador de orden completo, en el polinomio $E(s)$.

1.5.1. Esquema de control clásico equivalente

El esquema de control por realimentación del estado observado propuesto en la Figura 1.3 es estructuralmente diferente al lazo de control clásico de la Figura 1.4; sin embargo, puede demostrarse que existe una equivalencia entre ambos esquemas, si bien no son exactamente iguales. La diferencia radica en las señales de referencia que actúan como entrada a cada uno de los lazos, las que resultan estar relacionadas mediante un prefiltro externo.

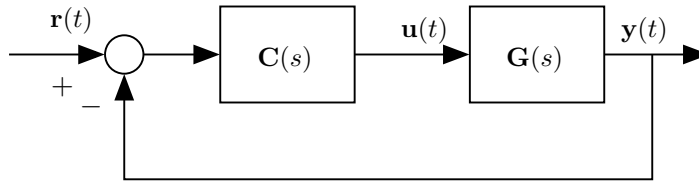


Figura 1.4. Esquema de control clásico.

Lema 9. *El esquema de control por realimentación del estado de la figura 1.1, en que el observador está dado por la ecuación (1.3.3) y la realimentación está definida por la ecuación (1.5.1), es equivalente al esquema de control de la Figura 1.4 en que el controlador es:*

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{K}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{JC} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{J} \quad (1.5.7)$$

La señal de referencia en este lazo es $\mathbf{r}(t)$, la cual se relaciona con $\bar{\mathbf{r}}(t)$ según:

$$\bar{\mathbf{R}}(s) = \underbrace{\mathbf{K}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{J}}_{\mathbf{F}_r(s)} \cdot \mathbf{R}(s) \quad (1.5.8)$$

Demostración

Si se utiliza la ecuación (1.3.8), para reemplazar el estado estimado de la planta en la ecuación (1.5.1), se obtiene:

$$\mathbf{U}(s) = \bar{\mathbf{R}}(s) - \mathbf{K}(\mathbf{T}_1(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{T}_2(s)\mathbf{Y}(s)) \quad (1.5.9)$$

$$= (\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{T}_1(s))^{-1} (\bar{\mathbf{R}}(s) - \mathbf{K}\mathbf{T}_2(s)\mathbf{Y}(s)) \quad (1.5.10)$$

$$= \underbrace{(\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{T}_1(s))^{-1}\mathbf{K}\mathbf{T}_2(s)}_{\text{Controlador}} \underbrace{(\mathbf{R}(s) - \mathbf{Y}(s))}_{\mathbf{E}(s)} \quad (1.5.11)$$

donde se ha hecho:

$$\bar{\mathbf{R}}(s) = \mathbf{K}\mathbf{T}_2(s)\mathbf{R}(s) \quad (1.5.12)$$

Las transferencias $\mathbf{T}_1(s)$ y $\mathbf{T}_2(s)$ son las definidas en las ecuaciones (1.3.9) y (1.3.10). Por lo tanto, el controlador equivalente es de la forma:

$$\mathbf{C}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{T}_1(s))^{-1}\mathbf{K}\mathbf{T}_2(s) \quad (1.5.13)$$

$$= (\mathbf{I} + \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{J} \quad (1.5.14)$$

donde se puede usar la Propiedad 5 en el Apéndice A

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{K}(\mathbf{I} + (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{J} \quad (1.5.15)$$

$$= \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{J} \quad (1.5.16)$$

En tanto, el prefiltro de la referencia es:

$$\bar{\mathbf{R}}(s) = \mathbf{K}\mathbf{T}_2(s)\mathbf{R}(s) = \underbrace{\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{J}}_{\mathbf{F}_r(s)} \mathbf{R}(s) \quad (1.5.17)$$

□□□

Respecto al controlador obtenido deben hacerse importante apreciaciones, si la ecuación (1.5.7) se reescribe como una realización (mínima) en variables de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{J}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{J}(\mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t)) \quad (1.5.18)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}_c(t) \quad (1.5.19)$$

- Se trata de un controlador **estrictamente propio**, pues en su realización en variables de estado, la matriz de paso directo **D** es nula.
- El controlador tiene n polos, dados por los autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{J}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K}$, es decir, son las raíces de la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = 0 \quad (1.5.20)$$

- El controlador no asegura error estacionario cero, pues, en general, no tiene polos en el origen.

Para ilustrar de mejor forma la equivalencia descrita entre el control por realimentación del estado observado y un lazo de control clásico se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. *Consideremos una planta inestable y de fase no mínima, definida por su función de transferencia*

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{6(-s+1)}{(s+3)(-s+2)} \quad (1.5.21)$$

que también puede expresarse en variables de estado como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.5.22)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -6 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (1.5.23)$$

Para establecer la equivalencia entre un esquema de control clásico y uno por realimentación del estado para esta planta, en primer lugar se diseña un controlador estabilizante de orden $n = 2$, estrictamente propio, para luego a partir de los polos de lazo cerrado, obtener las matrices de ganancia del observador **J** y de la realimentación **K**, tal como establece la ecuación (1.5.2). Se supone un controlador de la forma:

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} = \frac{p_1s + p_0}{s^2 + l_1s + l_0} \quad (1.5.24)$$

Con lo cual se resuelve la ecuación de asignación de polos de lazo cerrado, que se fijan en $s = -3, -4, -4$ y -5 :

$$A_d(s) = A(s)L(s) + B(s)P(s) \quad (1.5.25)$$

$$= (s+3)(s-2)(s^2 + l_1s + l_0) + 6(s-1)(p_1s + p_0) = (s+3)(s+4)^2(s+5) \quad (1.5.26)$$

Así se obtiene el controlador:

$$C(s) = \frac{42(s+3)}{s^2 + 15s - 166} \quad (1.5.27)$$

Ahora, si se considera un esquema de control por realimentación del estado observado como el de la Figura 1.3, tanto los polos dados por la ganancia del observador, así como los debidos a la ganancia de realimentación, se pueden asignar arbitrariamente pues el modelo de estado (1.5.22)-(1.5.23) es completamente controlable y observable, pues se obtuvo a partir de la función de transferencia (1.5.21).

Se asignan los polos del observador de manera que sean los más rápidos del lazo cerrado y más rápidos que los polos de la planta. Se resuelve la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{C}) = (s+4)(s+5) \quad (1.5.28)$$

Para obtener la matriz de ganancia \mathbf{J} , por ejemplo, usando comando **place** de MATLAB. Se obtiene $\mathbf{J} = [1,417, 2,750]^T$.

La ganancia de realimentación \mathbf{K} se obtiene asignando los restantes polos de lazo cerrado en la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = (s+3)(s+4) \quad (1.5.29)$$

En que se obtiene $\mathbf{K} = [18,0, 5,0]$

Con esto el controlador equivalente (1.5.7) es el mismo que el dado originalmente, mientras que el prefiltro (1.5.8) que relaciona las señales de referencia es:

$$F_r(s) = \frac{42(s+3)}{s^2 + 9s + 20} \quad (1.5.30)$$

En la Figura 1.5 se muestra el esquema empleado en SIMULINK-MATLAB para comparar ambos lazos de control. En la Figura 1.6 se muestran los resultados de la simulación realizada, en que la planta tiene un estado inicial $\mathbf{x}_0 = [0,0, 0,1]^T$, y la referencia es un escalón unitario en $t = 6[s]$.

En la Figura 1.6 no se aprecia diferencia alguna entre la salida de la planta en el lazo de control tradicional y en el lazo con realimentación del estado. Además se hace evidente que si bien ambos esquemas de control son estables, la salida de la planta mantiene un error estacionario apreciable respecto a la referencia, debido a que el controlador no tiene integración.

1.5.2. Esquema con integración

Hasta al momento, el esquema de control por realimentación del estado observado de una planta se ha vislumbrado como una alternativa útil y simple. Sin embargo, esta estrategia de control no asegura que la salida de la planta siga, en estado estacionario, a una señal de referencia que tienda a una constante, o que perturbaciones de esta misma naturaleza sean compensadas perfectamente. Para lograr estas dos características se pueden seguir dos estrategias:

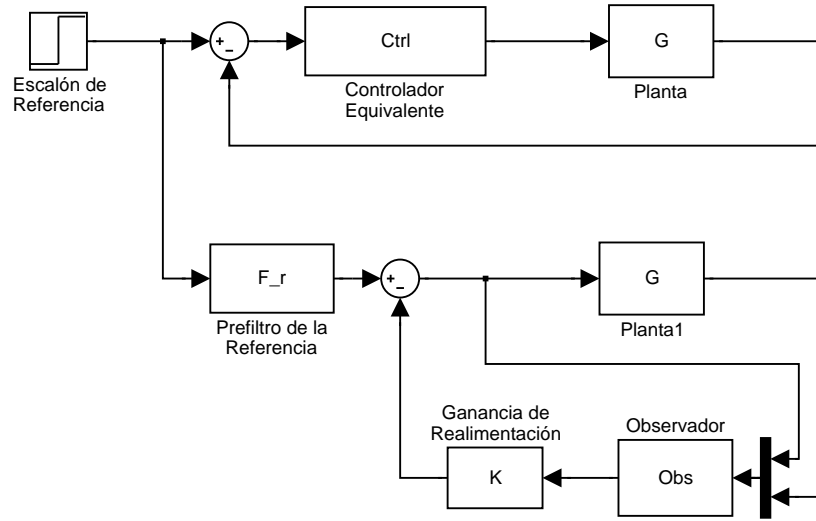


Figura 1.5. Esquema de control clásico y por realimentación del estado en MATLAB.

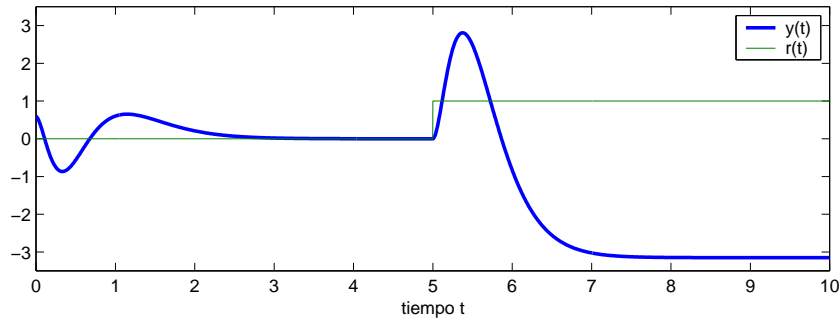


Figura 1.6. Señal de referencia y salida de la planta.

- modelar las perturbaciones como estados de la planta y compensarlas usando una estimación de ellas, como se muestra luego en §1.5.3, lo que se denomina **Principio de Modelo Interno**; o bien,
- usar el esquema de la Figura 1.7 que combina la realimentación del estado observado con la acción de un integrador en paralelo, o m integradores en el caso de sistemas multivariables.

En esta subsección se estudia la segunda alternativa, que corresponde al esquema que se muestra en la Figura 1.7. En él, al esquema de realimentación original se ha agregado en cascada un lazo con integración y una ganancia \mathbf{L} . Nótese que si

el objetivo de control fuera compensar perturbaciones sinusoidales de frecuencia ω_d , o lograr seguimiento estacionario perfecto a referencias de ese mismo tipo, los integradores externos se podrían reemplazar por transferencias del tipo $1/(s^2 + \omega_d^2)$.

La señal de referencia $\bar{\mathbf{r}}(t)$ que aparece como entrada en el lazo de la Figura 1.7 corresponde a una señal exógena que se relaciona mediante un prefiltro con la referencia $\mathbf{r}(t)$ de un lazo de control clásico equivalente. Este prefiltro resulta tener ganancia a continua unitaria, como se muestra en la Sección §3.2, ya que si la referencia es constante la integración asegura en estado estacionario que $\mathbf{r}_\infty = \mathbf{y}_\infty = \bar{\mathbf{r}}_\infty$.

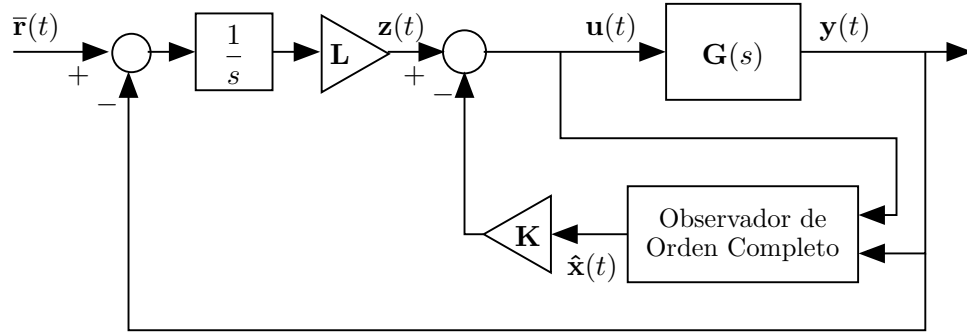


Figura 1.7. Esquema con realimentación del estado e integración

Para obtener los polos de lazo cerrado podemos combinar las ecuaciones de estado que describen el lazo interior (1.5.5)-(1.5.6), en que $\bar{\mathbf{r}}(t)$ se reemplaza por $\mathbf{z}(t)$, con las que describen al integrador en el lazo exterior, que son:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{0} \cdot \mathbf{x}_i + (\bar{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{y}(t)) \quad (1.5.31)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{L}\mathbf{x}_i(t) \quad (1.5.32)$$

Se obtiene de esta forma una representación en variables de estado del sistema completo de la Figura 1.7, en que la entrada es $\bar{\mathbf{r}}(t)$ y la salida es $\mathbf{y}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} & \mathbf{BL} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{JC} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \bar{\mathbf{r}}(t) \quad (1.5.33)$$

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{C} \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}_i(t) \end{bmatrix} \quad (1.5.34)$$

Lema 10. *Los polos de lazo cerrado del sistema de control de la Figura 1.7 equivalen a los autovalores de su modelo en variables de estado (1.5.33)-(1.5.34), es decir, son las $2n + m$ soluciones de la ecuación:*

$$\frac{1}{s^{n-m}} \det (s^2 \mathbf{I}_n + (-\mathbf{A} + \mathbf{BK})s + \mathbf{BLC}) \det (s \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{JC}) = 0 \quad (1.5.35)$$

Demostración

Los autovalores del sistema definido por (1.5.33)-(1.5.34) son los autovalores de la matriz principal, es decir, se obtienen a partir de la ecuación:

$$\det \left(\begin{bmatrix} s \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} & -\mathbf{BL} \\ 0 & s \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{JC} & 0 \\ \mathbf{C} & 0 & s \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (1.5.36)$$

El determinante de esta matriz definida por bloques puede calcularse utilizando la Propiedad 4 en el Apéndice A, con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \det (s \mathbf{I}_m) \det \left(\begin{bmatrix} s \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ 0 & s \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{JC} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{BL} \\ 0 \end{bmatrix} (s \mathbf{I}_m)^{-1} [\mathbf{C} \ 0] \right) \\ = s^m \cdot \det \left(\begin{bmatrix} s \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \frac{1}{s} \mathbf{BLC} & -\mathbf{BK} \\ 0 & s \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{JC} \end{bmatrix} \right) \\ = \frac{1}{s^{n-m}} \cdot \det (s^2 \mathbf{I}_n + (-\mathbf{A} + \mathbf{BK})s + \mathbf{BLC}) \cdot \det (s \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{JC}) \end{aligned} \quad (1.5.37)$$

Aplicando una transformación de estado $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}$ en que \mathbf{T} es no singular, siempre es posible hacer

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}^{-1} = [\mathbf{I}_m \ 0] \quad (1.5.38)$$

pues se han supuesto sistemas completamente observables, lo cual asegura que \mathbf{C} tiene rango completo. Esta transformación de similaridad se aplica en la Sección §2.1 para simplificar los desarrollos. De hecho si se aplica al último término del determinante central, se aprecia que:

$$\mathbf{BLC} = \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{L} [\mathbf{I}_m \ 0] \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} [\bar{\mathbf{B}} \mathbf{L} \ 0] \mathbf{T} \quad (1.5.39)$$

En consecuencia, se puede afirmar que el determinante central tiene $n - m$ raíces en cero, que se simplifican con el primer término en la ecuación (1.5.35). Por tanto tenemos $n + m$ raíces debidas al determinante central y n debidas al último determinante.

□□□

Si se analiza la ecuación (1.5.35) se aprecia que se sigue cumpliendo el Principio de Separación, análogo al establecido en el Lema 8, pues se tienen $2n + m$ polos de lazo cerrado, de los cuales:

- n corresponden al observador de orden completo y quedan fijados por la elección de la matriz de ganancia \mathbf{J} , mientras que los restantes
- $n + m$ quedan establecidos por las ganancias \mathbf{K} y \mathbf{L} , de la realimentación del estado y del integrador, respectivamente.

1.5.3. Modelado de perturbaciones

La estrategia de control por realimentación del estado observado permite también compensar perturbaciones en la planta, ya que si éstas son de naturaleza conocida, pueden incorporarse al modelo de la planta como estados no controlables. A través de un observador pueden ser estimadas de igual forma que los estados *originales* de la planta, y pueden ser realimentadas de manera conveniente para anular su efecto sobre la salida $\mathbf{y}(t)$.

Si se considera un esquema como el de la Figura 1.8, en que la planta tiene una perturbación de entrada $d(t)$, esta señal se puede modelar como la salida del sistema de orden n_d :

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(t) \quad (1.5.40)$$

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(t) \quad (1.5.41)$$

para algún estado inicial $\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_0$.

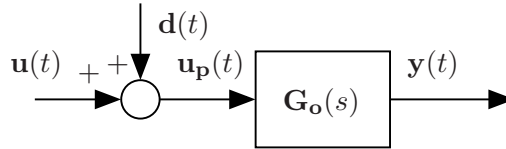


Figura 1.8. Planta con perturbaciones de entrada.

Si se combina este modelo de la perturbación con el de la planta (1.3.1)-(1.3.2), teniendo presente que la entrada a la planta es $\mathbf{u}_p(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t)$, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_o(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_o & \mathbf{B}_o \mathbf{C}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_o \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (1.5.42)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_o & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (1.5.43)$$

Al implementar un observador para esta planta ampliada, de orden $n + n_d$, se obtiene una estimación tanto de los estados de la planta original, como de los estados del modelo de la perturbación. Es decir:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_o(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_d(t) \end{bmatrix} \quad (1.5.44)$$

Por lo tanto, al hacer la realimentación del estado observado, es conveniente elegir:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_o \quad \mathbf{C}_d] \quad (1.5.45)$$

pues, en este caso, la entrada a la planta será:

$$\mathbf{u}_p(t) = \bar{\mathbf{r}}(t) - [\mathbf{K}_o \quad \mathbf{C}_d] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_o(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_d(t) \end{bmatrix} + \mathbf{d}(t) \quad (1.5.46)$$

$$= \bar{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{K}_o \hat{\mathbf{x}}_o(t) + (\mathbf{d}(t) - \underbrace{\mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_d(t)}_{\hat{\mathbf{d}}(t)}) \quad (1.5.47)$$

Se puede observar que los polos del controlador equivalente, cuando se realimenta el estado observado, se pueden obtener a partir de la ecuación (1.5.20), es decir:

$$\begin{aligned} \det \left(s\mathbf{I}_{n+n_d} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_o & \mathbf{B}_o\mathbf{C}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_o \\ \mathbf{J}_d \end{bmatrix} [\mathbf{C}_o \quad 0] + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_o \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{K}_o \quad \mathbf{C}_d] \right) \\ = \det \left(\begin{bmatrix} s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_o + \mathbf{J}_o\mathbf{C}_o + \mathbf{B}_o\mathbf{K}_o & 0 \\ \mathbf{J}_d\mathbf{C}_o & s\mathbf{I}_{n_d} - \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \right) \\ = \det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_o + \mathbf{J}_o\mathbf{C}_o + \mathbf{B}_o\mathbf{K}_o) \det(s\mathbf{I}_{n_d} - \mathbf{A}_d) = 0 \quad (1.5.48) \end{aligned}$$

Es decir, el controlador equivalente posee los mismos polos que se hubieran obtenido al no incluir el modelado de las perturbaciones, más los que se agregan a éste debido al modelado de las perturbaciones.

Este resultado coincide con la estrategia usada al diseñar controladores mediante el **Principio del Modelo Interno** para las perturbaciones, es decir, se incluyen sus frecuencias naturales como polos del controlador.

Este esquema puede ser perfectamente utilizado para obtener integración en el controlador, cuando las perturbaciones que interesa compensar son constantes o tienden asintóticamente a una constante. Nótese que este tipo de perturbaciones tendrían un modelo caracterizado por $\mathbf{A}_d = \mathbf{0}$, lo que implica que en la ecuación (1.5.48) el controlador posee n_d polos en el origen, es decir, integración.

OBSERVADOR DE LUENBERGER Y REALIMENTACIÓN DEL ESTADO

En este capítulo se aborda el objetivo central de este trabajo de Tesis, el cual es poder interpretar un lazo de control clásico cualquiera, en que el controlador puede o no ser bipropio, como un esquema de realimentación del estado que se estima mediante un observador de orden reducido o de Luenberger.

En el capítulo anterior se abordó el caso en que se realimenta el estado estimado a través de un observador de orden completo, lo que permite establecer la equivalencia con un lazo de control clásico bajo la restricción de tener un controlador estrictamente propio.

En este capítulo se revisan las ecuaciones del observador de orden reducido de manera de simplificarlas, antes de utilizarlas en los desarrollos posteriores. En seguida se estudia el esquema de realimentación del estado estimado a través de este observador de orden reducido, y su equivalencia con un esquema de control tradicional.

2.1. Revisión del observador de orden reducido

En el Capítulo 1 se hizo una breve introducción a los observadores de orden reducido, principalmente haciendo la distinción respecto a los observadores de orden completo.

Se considera un sistema de orden n , con m entradas y salidas, definido en variables de estado por las ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.1.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (2.1.2)$$

El observador de orden reducido, también llamado **observador de Luenberger**, para este sistema se distingue del de orden completo en que aprovecha directamente la información que proporcionan las m salidas de la planta para estimar parte de su vector de estados. El observador de Luenberger resulta ser un sistema de orden $n - m$ tal como puede apreciarse en las ecuaciones (1.4.11)-(1.4.12) que se obtuvieron en la sección 1.4. Éstas son:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t) = & (\mathbf{C}' - \mathbf{J}\mathbf{C}) \mathbf{A}\mathbf{L}_2\mathbf{q}(t) + (\mathbf{C}' - \mathbf{J}\mathbf{C}) \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ & + (\mathbf{C}' - \mathbf{J}\mathbf{C}) \mathbf{A} (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2\mathbf{J})\mathbf{y}(t) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{L}_2\mathbf{q}(t) + (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2\mathbf{J})\mathbf{y}(t) \quad (2.1.4)$$

en que las matrices \mathbf{C} , \mathbf{C}' , \mathbf{L}_1 y \mathbf{L}_2 se relacionan según la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_n \quad (2.1.5)$$

La simplificación clave para los desarrollos posteriores está dada por el siguiente Lema:

Lema 11. *Considere el sistema dado por las ecuaciones de estado (2.1.1)-(2.1.2), en que el par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) es completamente observable, siempre existe una transformación de estado $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}(t)$, de manera que el sistema quede expresado en la forma:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (2.1.6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (2.1.7)$$

Demostración

Si se considera la ecuación (2.1.5), ésta se ha obtenido eligiendo \mathbf{C}' de manera que $\det([\mathbf{C}, \mathbf{C}']^T) \neq 0$. Sin embargo, esta puede reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{C}'\mathbf{T}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (2.1.8)$$

Es decir, si tomamos como transformación del estado a una matriz no singular:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \end{bmatrix} \quad (2.1.9)$$

Entonces, según el Lema 1 en la página 3, se obtiene:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.1.10)$$

□□□

En adelante se considerará la planta dada en la forma (2.1.6)-(2.1.7), pues permite simplificar considerablemente las expresiones posteriores, ya que:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}] \quad (2.1.11)$$

Por lo tanto, se puede elegir:

$$\mathbf{C}' = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \quad (2.1.12)$$

y, en consecuencia, realizando la inversión en (1.4.2) y separando:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.1.13)$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (2.1.14)$$

En tanto que los bloques en que se ha particionado las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} en la ecuación (2.1.6) son:

$$\mathbf{A}_{11} = [\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (2.1.15)$$

$$\mathbf{A}_{12} = [\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)} \quad (2.1.16)$$

$$\mathbf{A}_{21} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m} \quad (2.1.17)$$

$$\mathbf{A}_{22} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)} \quad (2.1.18)$$

$$\mathbf{B}_1 = [\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}] \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (2.1.19)$$

$$\mathbf{B}_2 = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m} \quad (2.1.20)$$

Precisamente estas simplificaciones permiten apreciar de mejor manera la idea clave del observador de orden reducido, pues si se particiona el vector de estado del sistema en la forma:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{en que} \quad \begin{cases} \mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n-m} \end{cases} \quad (2.1.21)$$

la ecuación (2.1.4) se puede reescribir como:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{J} \right) \mathbf{y}(t) \quad (2.1.22)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{q}(t) + \mathbf{J}\mathbf{y}(t) \end{bmatrix} \quad (2.1.23)$$

Esto significa que:

- las m variables de estado correspondientes a $\mathbf{x}_1(t)$ en realidad no se estiman sino que se suponen **iguales** a la salida $\mathbf{y}(t)$ de la planta, mientras que
- Las restantes $n - m$ variable de estado, correspondientes a $\mathbf{x}_2(t)$, se reconstruyen a partir del estado $\mathbf{q}(t)$ del observador y de la salida de la planta que aparece **directamente** en la estimación. Además, si se despeja $\mathbf{q}(t)$ se obtiene

$$\mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{x}}_2(t) - \mathbf{J}\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.1.24)$$

Es decir, la variable de estado del observador $\mathbf{q}(t)$ establece una relación entre la estimación de los estados $\mathbf{x}_2(t)$ y la salida $\mathbf{y}(t)$ de la planta.

Si se utilizan las expresiones simplificadas de \mathbf{C} , \mathbf{C}' , \mathbf{L}_1 y \mathbf{L}_2 se puede notar que:

$$\mathbf{C}' - \mathbf{J}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.1.25)$$

Las ecuaciones del observador (2.1.3)-(2.1.4) finalmente se pueden reescribir como:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) + \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.1.26)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) \quad (2.1.27)$$

En lo sucesivo, cuando la dimensión de la matriz identidad se pueda deducir del contexto, esta se omitirá de las ecuaciones.

De la representación del observador (2.1.26)-(2.1.27) se pueden concluir dos resultados muy importantes presentados en los siguientes lemas:

Lema 12. *Si se considera el sistema definido por las ecuaciones (2.1.6)-(2.1.7) y su observador de orden reducido asociado (2.1.26)-(2.1.27), entonces los polos del observador son las raíces del polinomio:*

$$E(s) = \det (s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{J}\mathbf{A}_{12}) \quad (2.1.28)$$

Además, el error de estimación sobre las variables de estado de la planta correspondiente a $\mathbf{x}_2(t)$ satisface la ecuación:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2(t) = [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \quad (2.1.29)$$

Demostración

De la ecuación (2.1.26) del observador de orden reducido se aprecia que sus polos dependen de la matriz:

$$[-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} = [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = -\mathbf{J}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{22} \quad (2.1.30)$$

cuyos autovalores se obtienen según la ecuación (2.1.28).

El error de estimación de las variables de estado correspondientes a $\mathbf{x}_2(t)$ es

$$\tilde{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{x}_2(t) - \hat{\mathbf{x}}_2(t) \quad (2.1.31)$$

Por tanto, si se deriva esta ecuación, puede analizarse cada uno de los dos términos que aparecen al lado derecho. En primer lugar, se tiene que:

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = [0 \quad \mathbf{I}_{n-m}] \dot{\mathbf{x}}(t) = [0 \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + [0 \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.1.32)$$

Mientras que:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) &= \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{J}\dot{\mathbf{y}}(t) \\ &= [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) \right) + [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{J} [\mathbf{I} \quad 0] \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) \right) + [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + [\mathbf{J} \quad 0] (\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) \\ &= [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) \right) + [0 \quad \mathbf{I}] \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + [\mathbf{J} \quad 0] \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (2.1.33) \end{aligned}$$

Haciendo la resta entre las ecuaciones (2.1.32) y (2.1.33), se pueden agrupar los términos convenientemente:

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) = [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \left(\mathbf{x}(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) - \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) \right) \quad (2.1.34)$$

donde, si se usa la ecuación (2.1.24) y el hecho que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_1(t)$, se obtiene:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) - \dot{\mathbf{x}}_2(t) = [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) \right) \quad (2.1.35)$$

$$= [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) - 0 - \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{J}\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{x}}_2(t) - \mathbf{J}\mathbf{y}(t) \end{bmatrix} \quad (2.1.36)$$

$$= [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{x}_2(t) - \hat{\mathbf{x}}_2(t)) \quad (2.1.37)$$

□□□

Lema 13. Dado la planta expresada por las ecuaciones (2.1.6)-(2.1.7) y su observador de orden reducido asociado (2.1.26)-(2.1.27), entonces la transformada de Laplace del estado estimado puede expresarse como:

$$\hat{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{T}_1(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{T}_2(s)\mathbf{Y}(s) \quad (2.1.38)$$

en que las matrices de transferencia quedan definidas por las ecuaciones:

$$\mathbf{T}_1(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \left(s\mathbf{I}_{n-m} - [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \right)^{-1} [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{B} \quad (2.1.39)$$

$$\mathbf{T}_2(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \left(s\mathbf{I}_{n-m} - [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \right)^{-1} [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.1.40)$$

Demostración

Es directa de aplicar transformada de Laplace a las ecuaciones (2.1.26)-(2.1.27), suponiendo condiciones iniciales iguales a cero, y eliminando de ellas la variable $\mathbf{Q}(s) = \mathcal{L}[q(t)]$

□□□

La importancia de los dos lemas recién presentados es que establecen que la observación del estado mediante el observador de orden reducido queda caracterizada por el polinomio $E(s)$ y sus $n - m$ raíces, definido en (2.1.28), que tiene la misma estructura que el polinomio (1.3.7) que aparece en el caso del observador de orden completo. Esto será útil para usar la misma técnica en la asignación de los polos de lazo cerrado.

2.2. Realimentación del estado mediante observador de orden reducido

En esta sección se analiza el uso del observador de Luenberger o de orden reducido para un esquema de control por realimentación del estado observado, tal como

el que se aprecia en la Figura 2.1. Se intenta hacer los desarrollos de manera análoga a los presentados en la Sección §1.5, en la cual la estimación del estado se hizo con un observador de orden completo.

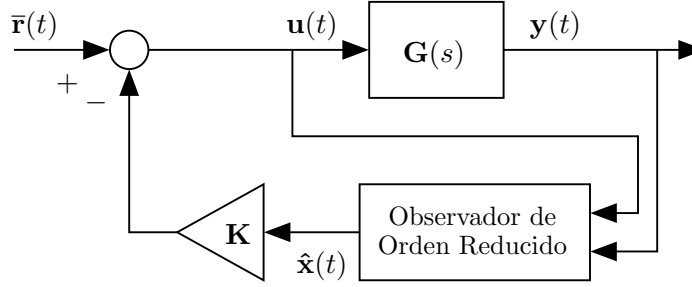


Figura 2.1. Esquema control por de realimentación del estado observado.

Tal como se ha hecho en los desarrollos anteriores se supone una planta de orden n , con m entradas y m salidas, definido en variables de estado por las ecuaciones (2.1.1)-(2.1.2), que suponemos corresponde a la realización (2.1.6)-(2.1.7). El observador de orden reducido asociado a ésta, suponiendo una representación en la forma canónica observable, está dado por las ecuaciones (2.1.26)-(2.1.27). Mientras que el esquema por realimentación del estado de la Figura 2.1 queda definido mediante la ecuación de realimentación lineal del estado observado:

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (2.2.1)$$

2.2.1. Polos de lazo cerrado

Para el sistema de control de la Figura 2.1 tenemos que se cumple el **Principio de Separación** para los polos de lazo cerrado, de manera análoga al Lema 8 (pág.13) para el caso en que utiliza un observador de orden completo.

Lema 14. *Si se considera una planta (2.1.6)-(2.1.7), cuyo estado se estima a través del observador de orden reducido (2.1.26)-(2.1.27) y se realimenta según (2.2.1), entonces:*

- (i) *Los polos de lazo cerrado del sistema completo son las $2n - m$ raíces del polinomio*

$$A_{cl}(s) = \underbrace{\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK})}_{F(s)} \cdot \underbrace{\det(s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{JA}_{12})}_{E(s)} \quad (2.2.2)$$

- (ii) *Los estados del sistema que corresponden al error de estimación $\tilde{\mathbf{x}}_2(t)$ del observador de orden reducido, **no son controlables** desde la entrada del sistema completo $\bar{\mathbf{r}}(t)$.*

Demostración

Para probar el lema es conveniente encontrar una representación en espacio de estados para el sistema completo, y, a partir de ésta, calcular los autovalores de la matriz principal y analizar la controlabilidad de sus polos.

Si se combinan las ecuaciones (2.1.1), (2.1.27) y (2.2.1), se tiene que:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{BK} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) \right) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{r}}(t) \quad (2.2.3)$$

$$= \left(\mathbf{A} - \mathbf{BK} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{x}(t) - \mathbf{BK} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{r}}(t) \quad (2.2.4)$$

Mientras que haciendo lo mismo en la ecuación (2.1.26) se tiene que:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) \quad (2.2.5)$$

$$- [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{BK} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) \right) + [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{B}\bar{\mathbf{r}}(t) \quad (2.2.6)$$

$$= [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (2.2.7)$$

$$+ [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{B}\bar{\mathbf{r}}(t) \quad (2.2.8)$$

Por tanto, los autovalores del sistema en lazo cerrado pueden obtenerse a partir de los autovalores de la matriz principal que resulta al combinar las ecuaciones anteriores

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} & -\mathbf{BK} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} & [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

Los autovalores de esta matriz podrían calcularse utilizando la Propiedad 4, sobre matrices definidas por bloques, que se detalla en el Apéndice A. Sin embargo, resulta más simple obtener los polos de lazo cerrado a partir de las ecuaciones del sistema (2.1.6)-(2.1.7) y el error de estimación $\tilde{\mathbf{x}}_2(t)$, que satisface la ecuación (2.1.29). Para esto se combinan las ecuaciones (2.1.6) y (2.2.1), pero observando que el estado estimado por el observador de orden reducido puede escribirse como:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_2(t) - \hat{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{x}(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \quad (2.2.10)$$

Por tanto, para el lazo cerrado se tienen las ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \\ 0 & [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{r}}(t) \quad (2.2.11)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.2.12)$$

De este modelo del sistema en lazo cerrado se deduce que:

- (i) Los polos son los autovalores de la matriz principal, que está definida por bloques y resulta ser triangular superior. Es decir, corresponden a las $2n-m$ soluciones de la ecuación

$$\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \cdot \det\left(s\mathbf{I}_{n-m} - [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix}\right) = 0 \quad (2.2.13)$$

Estas raíces corresponden a las raíces del polinomio (2.2.2).

- (ii) Se puede observar que la entrada $\bar{\mathbf{r}}(t)$ no tiene efecto alguno sobre $\tilde{\mathbf{x}}_2(t)$, el que corresponde a la parte no controlable del sistema en lazo cerrado, como se aprecia comparando (2.2.11) con la forma (1.1.17) en la página 4.

□□□

Es importante hacer notar que en este caso, en que el estado se estima a través de un observador de orden reducido, se tienen $2n-m$ polos de lazo cerrado que quedan determinados por la ecuación (2.2.2), que establece nuevamente un **Principio de Separación** para los polos de lazo cerrado, análogo al del Lema 8 en la página 13, para el caso del observador de orden completo:

- n polos quedan determinados por la ganancia \mathbf{K} de la realimentación del estado, mientras que
- $n-m$ polos quedan determinados por la ganancia \mathbf{J} del observador de orden reducido. Estos polos resultan ser no controlables.

2.2.2. Controlador equivalente

En la Sección §1.5.1 se estableció que el esquema de control por realimentación del estado estimado a través de un observador de orden completo es equivalente a un esquema de control clásico como el de la Figura 2.2, con la restricción de que el controlador (1.5.7) es estrictamente propio. De manera análoga se puede obtener, para el caso del estado estimado con un observador de Luenberger, un esquema de control clásico equivalente como se establece en el siguiente Lema:

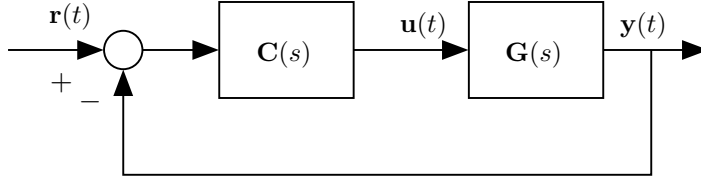


Figura 2.2. Esquema de control clásico.

Lema 15. Si se considera el sistema de la Figura 2.1, en que la planta está definida por (2.1.6)-(2.1.7) y se realimenta el estado estimado a través del observador de orden reducido (2.1.26)-(2.1.27), entonces éste esquema es equivalente al esquema de la Figura 2.2, en que la realización mínima del controlador es:

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{C}_c (s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c \quad (2.2.14)$$

en que las matrices son:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (2.2.15)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.16)$$

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (2.2.17)$$

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.18)$$

La señal de referencia $\mathbf{r}(t)$ se relaciona con $\bar{\mathbf{r}}(t)$ según la ecuación:

$$\bar{\mathbf{R}}(s) = \underbrace{\left(\mathbf{C}_f (s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_f)^{-1} \mathbf{B}_f + \mathbf{D}_f \right)}_{\mathbf{F}_r(s)} \cdot \mathbf{R}(s) \quad (2.2.19)$$

en que las matrices son:

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (2.2.20)$$

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.21)$$

$$\mathbf{C}_f = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (2.2.22)$$

$$\mathbf{D}_f = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.23)$$

Demostración

En primer lugar, aplicando transformada de Laplace a la ecuación (2.2.1) y utilizando la ecuación (2.1.38), se obtiene:

$$\mathbf{U}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{T}_1(s))^{-1} \mathbf{K}\mathbf{T}_2(s) (\mathbf{R}(s) - \mathbf{Y}(s)) \quad (2.2.24)$$

en que

$$\bar{\mathbf{R}}(s) = \mathbf{K}\mathbf{T}_2(s)\mathbf{R}(s) \quad (2.2.25)$$

Las transferencias $\mathbf{T}_1(s)$ y $\mathbf{T}_2(s)$, son las definidas en (2.1.39) y (2.1.40), respectivamente.

Reemplazando $\mathbf{T}_2(s)$ en la ecuación (2.2.25) se demuestra la ecuación (2.2.19) del prefiltro de la referencia.

En la ecuación (2.2.24) se aprecia que el controlador tiene la forma

$$\mathbf{C}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{T}_1(s))^{-1} \mathbf{K}\mathbf{T}_2(s) = \mathbf{C}_D(s)^{-1} \mathbf{C}_N(s) \quad (2.2.26)$$

que es la misma estructura del caso en que se utiliza un observador de orden completo, pero con la salvedad que las matrices de transferencia involucradas no son las mismas. Para demostrar la ecuación (2.2.14) se puede seguir un desarrollo usando funciones de transferencia, o bien, utilizando las matrices de la representación en variables de estado.

1. Mediante funciones de transferencia

En primer, lugar se observa que la transferencia $\mathbf{T}_2(s)$ se puede reescribir usando la Propiedad 5 del Apéndice A. Esto es:

$$\mathbf{T}_2(s) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{I} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.27)$$

$$= \left(\left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{I} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.28)$$

$$= \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \right)^{-1} s\mathbf{I} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.29)$$

Con esta expresión, se reemplazan las transferencias en la ecuación (2.2.26)

$$\mathbf{C}(s) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{K} \quad (2.2.30)$$

$$\left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \right)^{-1} s\mathbf{I} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.31)$$

$$= \mathbf{K} \left(\mathbf{I} + \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{K} \right)^{-1} \quad (2.2.32)$$

$$\left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \right)^{-1} s\mathbf{I} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.33)$$

$$= \mathbf{K} \left(s\mathbf{I} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})}_{\mathbf{M}} \right)^{-1} s\mathbf{I} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.34)$$

Se puede reescribir de la matriz identidad de manera de simplificar la expresión

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{K} (s\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} (s\mathbf{I} - \mathbf{M} + \mathbf{M}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.35)$$

$$= \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} + (s\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.36)$$

$$= \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} + \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.37)$$

$$= \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.38)$$

Esto demuestra la ecuación (2.2.14).

2. Mediante matrices de estado

Si se observa la ecuación (2.2.26), se puede escribir tanto la transferencia denominador como la transferencia numerador, para luego combinarlas como si estuvieran conectadas en serie.

$$\mathbf{C}_D(s) = \mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{T}_1(s) \quad (2.2.39)$$

$$= \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{I} \quad (2.2.40)$$

$$(2.2.41)$$

Para invertir esta transferencia se puede utilizar la Propiedad 12 en el Apéndice A:

$$\mathbf{C}_D(s)^{-1} = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{I} \quad (2.2.42)$$

$$= -\mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{I} \quad (2.2.43)$$

Esta forma puede considerarse una representación de estado, ya que corresponde a $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$.

En tanto el numerador del controlador es:

$$\mathbf{C}_N(s) = \mathbf{K}\mathbf{T}_2(s) \quad (2.2.44)$$

$$= \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.45)$$

Por tanto, usando la Propiedad 9 en el Apéndice B para conectar en serie numerador y denominador, se obtiene una representación en variables de estado del controlador:

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c \quad (2.2.46)$$

en que las matrices son:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & 0 \\ [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{BK} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.2.47)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \\ [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{BK} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.2.48)$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & -\mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.2.49)$$

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.2.50)$$

Se aprecia que los autovalores de la matriz \mathbf{A}_c dan origen a $2(n - m)$ polos para el controlador. Sin embargo, usando la transformación del estado:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t) \quad ; \text{ en que } \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} & -\mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} & -\mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (2.2.51)$$

se obtiene una representación diferente en espacio de estado del controlador:

$$\mathbf{C}(s) = \bar{\mathbf{C}}_c(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_c)^{-1}\bar{\mathbf{B}}_c + \mathbf{D}_c \quad (2.2.52)$$

en que las matrices son:

$$\bar{\mathbf{A}}_c = \mathbf{T}\mathbf{A}_c\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.2.53)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_c = \mathbf{T}\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \\ [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.2.54)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_c = \mathbf{C}_c\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.2.55)$$

Se puede apreciar que los polos correspondientes al primer bloque sobre la diagonal de la matriz $\bar{\mathbf{A}}_c$ son no observables; por tanto, la expresión del controlador (2.2.52) se reduce a la ecuación (2.2.14).

□□□

Respecto a este controlador equivalente obtenido es importante hacer las siguientes observaciones:

- Es un controlador de orden $n - m$, y, considerando su realización mínima (2.2.14), completamente controlable y observable.
- Sus polos están dados por las $n - m$ soluciones de la ecuación

$$\det \left(s\mathbf{I}_{n-m} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \right) = \det (s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}_2 + \mathbf{JA}_{12} - \mathbf{JB}_1\mathbf{K}_2) = 0 \quad (2.2.56)$$

en que \mathbf{A} y \mathbf{B} se han particionado como en (2.1.6), mientras que \mathbf{K} se particiona según

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \quad ; \text{ en que } \begin{cases} \mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m} \\ \mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)} \end{cases} \quad (2.2.57)$$

- El controlador es, en general, **bipropio**, pues su modelo de estado (2.2.14) tiene una matriz de paso directo \mathbf{D}_c que, en general, es no nula. Puede darse el caso que esta matriz sea nula dando origen a un controlador equivalente estrictamente propio como se puede ver en uno de los ejemplos del Capítulo 4.

Precisamente esta observación es el resultado más interesante que se obtiene al realizar la realimentación del estado estimado mediante un observador de orden reducido, ya que, a diferencia del de orden completo, elimina la restricción de tener un controlador de grado relativo mayor que cero (estrictamente propio).

Para ilustrar los resultados hasta el momento se presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. *Se considera nuevamente el sistema inestable y de fase no mínima utilizado en el Ejemplo 1 en la página 16. Este está definido por la función de transferencia*

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{6(s-1)}{(s+3)(s-2)} \quad (2.2.58)$$

Su expresión en la forma (2.1.6)-(2.1.7) es

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.2.59)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (2.2.60)$$

La planta es de orden $n = 2$ y en un sistema escalar o SISO, es decir, $m = 1$. Por tanto, para establecer la equivalencia con un esquema de realimentación del estado estimado con un observador de Luenberger, el controlador en un esquema clásico debe ser bipropio y de primer orden. Es decir, debe ser de la forma:

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} = \frac{p_1 s + p_0}{s + l_0} \quad (2.2.61)$$

que se obtiene a partir de la ecuación de asignación de polos de lazo cerrado, que se fijan en $s = -3, -4$ y -5 :

$$A_{cl}(s) = A(s)L(s) + B(s)P(s) \quad (2.2.62)$$

$$= (s + 3)(s - 2)(s + l_0) + 6(s - 1)(p_1 s + p_0) = (s + 3)(s + 4)(s + 5) \quad (2.2.63)$$

Resolviendo, se obtiene el controlador:

$$C(s) = \frac{7(s + 3)}{s - 31} \quad (2.2.64)$$

Para la planta dada por (2.2.59)-(2.2.60), el observador sólo hará una estimación sobre aquel estado que no se encuentra presente directamente en la salida. Su único polo en este caso está dado por la ecuación (2.1.28), y se asigna como el polo de lazo cerrado más rápido:

$$\det \left(s - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = (s + 5) \quad (2.2.65)$$

Se obtiene $\mathbf{J} = 5$. El observador resultante dado por las ecuaciones (2.1.26)-(2.1.27), es:

$$\dot{q}(t) = -5q(t) - 36u(t) - 14y(t) \quad (2.2.66)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} q(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} y(t) \quad (2.2.67)$$

Mientras que a la realimentación del estado observado se le asignan los mismos polos que en el Ejemplo 1. Se resuelve la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = (s + 3)(s + 4) \quad (2.2.68)$$

Se obtiene $\mathbf{K} = [2, 1]$.

El controlador **bipropio** equivalente, según la ecuación (2.2.14) es el mismo que el que se del lazo de control clásico, mientras que el prefiltro que relaciona $r(t)$ con $\bar{r}(t)$, dado por la ecuación (2.2.19), es igual a

$$F_r(s) = \frac{7(s+3)}{s+5} \quad (2.2.69)$$

En la Figura 2.3 se muestra el esquema de SIMULINK-MATLAB con que se comparan las simulaciones de los lazos de control clásico y de realimentación del estado estimado con el observador de orden reducido. En la Figura 2.4 se muestran los resultados de la simulación realizada, en que la planta tiene un estado inicial $\mathbf{x}_0 = [0,5, 0,0]^T$, y la señal de referencia $r(t)$ es un escalón unitario en $t = 3[s]$.

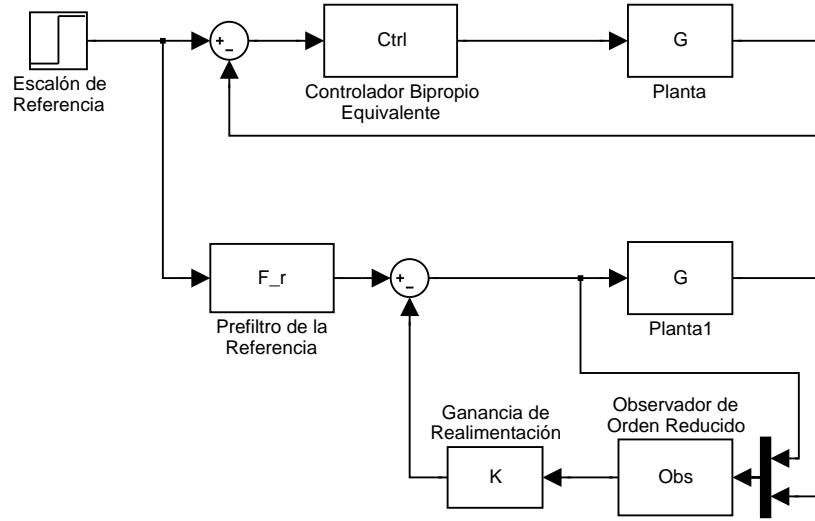


Figura 2.3. Esquema de control clásico y por realimentación del estado en MATLAB.

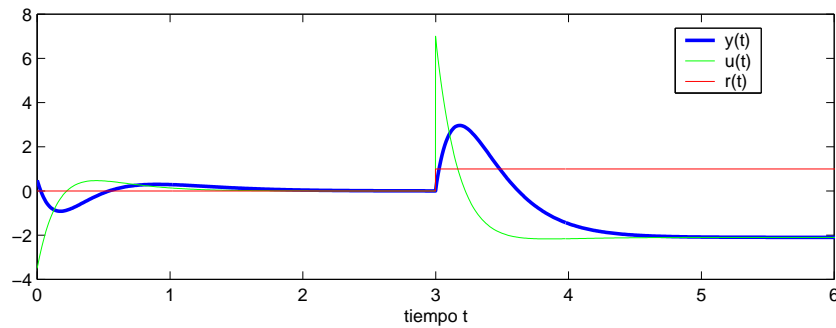


Figura 2.4. Señal de referencia y salida de la planta.

En la Figura 2.4 se muestra la señal de referencia $r(t)$, así como la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ de la planta. Se han graficado los resultados correspondientes al lazo

de control clásico y al de realimentación del estado observado.

Se aprecia que, si bien el sistema se estabiliza con ambos esquemas de control, la salida de la planta mantiene un error estacionario diferente de cero respecto a la referencia.

Además, si se observa la señal de actuación sobre la planta $u(t)$, cuando cambia la señal de referencia, esta también cambia inmediatamente debido a que el controlador es **bipropio**, es decir, tiene paso directo entre el error $e(t)$ y la salida $u(t)$.

PERTURBACIONES E INTEGRACIÓN EN EL CONTROLADOR

En el presente capítulo se revisa dos tópicos que se relacionan con las perturbaciones presentes en un lazo de control.

En primer lugar, se aborda la incorporación del modelo de las perturbaciones al modelo de la planta, cuando éstas son de naturaleza conocida. De esta forma al estimarlas éstas pueden ser realimentadas convenientemente para anular su efecto sobre la salida de la planta a controlar.

En segundo lugar, se consideran dos estrategias para obtener integración en el controlador equivalente al lazo de realimentación del estado, cuando éste se estima a través del observador de orden reducido, como se presentó en el capítulo anterior. Esta característica en el controlador garantiza anular el efecto de perturbaciones constantes en el lazo, así como que la salida siga en estado estacionario a una referencia del mismo tipo.

3.1. Modelado de las perturbaciones

En esta Sección interesa analizar la forma en que se puede usar el observador de orden reducido para la estimación y compensación de perturbaciones presentes en un lazo de control.

El que se utilice un observador de orden reducido o de orden completo no influye en la forma que las perturbaciones son modeladas. En consecuencia se utilizan los mismos desarrollos de la Sección §1.5.3.

Se considera el esquema de la Figura 3.1, que representa a una planta afectada por perturbaciones de entrada. Tal como antes, la planta se considera como un sistema de orden n , con m entradas y salidas definido por su representación en variables de estado:

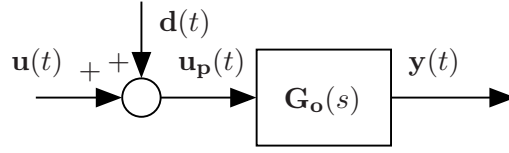


Figura 3.1. Planta con perturbación de entrada

$$\dot{\mathbf{x}}_o(t) = \mathbf{A}_o \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{B}_o \mathbf{u}_p(t) \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_o \mathbf{x}_o(t) \quad (3.1.2)$$

Las dimensiones de las matrices son:

$$\mathbf{A}_o \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad ; \quad \mathbf{B}_o \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad ; \quad \mathbf{C}_o \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3.1.3)$$

Las perturbaciones se suponen de naturaleza conocida, y por tanto, pueden ser modeladas como las salidas de un sistema no controlable de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_d(t) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(t) \quad (3.1.4)$$

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(t) \quad (3.1.5)$$

en que las dimensiones de las matrices son:

$$\mathbf{A}_d \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d} \quad ; \quad \mathbf{C}_d \in \mathbb{R}^{m \times n_d} \quad (3.1.6)$$

La entrada *verdadera* a la planta, como se puede apreciar en la Figura 3.1, es:

$$\mathbf{u}_p(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t) \quad (3.1.7)$$

De esta forma el modelo de estado ampliado de la planta, incluyendo las perturbaciones, es:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_o(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_o & \mathbf{B}_o \mathbf{C}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_o(t) \\ \mathbf{x}_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_o \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.1.8)$$

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{C}_o \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_o(t) \\ \mathbf{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (3.1.9)$$

O bien, puede escribirse simplemente como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (3.1.10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \quad (3.1.11)$$

en que las matrices son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_o & \mathbf{B}_o \mathbf{C}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+n_d) \times (n+n_d)} \quad (3.1.12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_o \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+n_d) \times m} \quad (3.1.13)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_o \quad \mathbf{0}] \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_d)} \quad (3.1.14)$$

3.1.1. El observador de orden reducido

Para hacer una estimación de los estados del sistema completo, es decir, tanto los estados *originales* de la planta como los del modelo de las perturbaciones, se plantean las mismas ecuaciones obtenidas anteriormente para el observador de orden reducido. Sin embargo, se debe tener presente que la observación se hace sobre el *sistema completo*, cuyo modelo está definido en las ecuaciones (3.1.10)-(3.1.11). Se observa además que las matrices de este modelo están particionadas de acuerdo a las ecuaciones (3.1.12), (3.1.13) y (3.1.14). Por tanto, es conveniente particionar también la ganancia del observador de la forma:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_o \\ \mathbf{J}_d \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{en que} \quad \begin{cases} \mathbf{J}_o & \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m} \\ \mathbf{J}_d & \in \mathbb{R}^{n_d \times m} \end{cases} \quad (3.1.15)$$

Para el caso de una planta con n estados, m entradas y m salidas, el observador de orden reducido está dado por las ecuaciones (2.1.26)-(2.1.27). Usando en estas expresiones la ganancia del observador particionada (3.1.15), en conjunto con las matrices definidas por bloque del sistema completo (3.1.12), (3.1.13) y (3.1.14), el observador se puede reescribir como:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}_{\text{obs}} \mathbf{q}(t) + \mathbf{B}_y \mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t) \quad (3.1.16)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{C}_{\text{obs}} \mathbf{q}(t) + \mathbf{D}_y \mathbf{y}(t) \quad (3.1.17)$$

Para que la partición de las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} del modelo ampliado de la planta sea consistente, es conveniente particionar las matrices de la planta (3.1.3) como en las ecuaciones (2.1.6)-(2.1.7). De esta forma, las matrices del observador en las ecuaciones (3.1.16)-(3.1.17) son:

$$\mathbf{A}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_o & \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ -\mathbf{J}_d & 0 & \mathbf{I}_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_d \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_d \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n_d} \end{bmatrix} \quad (3.1.18)$$

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_o & \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ -\mathbf{J}_d & 0 & \mathbf{I}_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_d \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_d \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J}_o \\ \mathbf{J}_d \end{bmatrix} \quad (3.1.19)$$

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_o & \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ -\mathbf{J}_d & 0 & \mathbf{I}_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.20)$$

$$\mathbf{C}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n_d} \end{bmatrix} \quad (3.1.21)$$

$$\mathbf{D}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J}_o \\ \mathbf{J}_d \end{bmatrix} \quad (3.1.22)$$

Estas expresiones se podrían reducir haciendo los productos matriciales respectivos. Por ejemplo, la matriz \mathbf{A}_{obs} se puede simplificar hasta llegar a la expresión:

$$\mathbf{A}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{22} - \mathbf{J}_o\mathbf{A}_{12} & -\mathbf{J}_o\mathbf{B}_1\mathbf{C}_d + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_d \\ -\mathbf{J}_d\mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_d - \mathbf{J}_d\mathbf{B}_1\mathbf{C}_d \end{bmatrix} \quad (3.1.23)$$

Así se tiene el primer resultado, ya que esta ecuación indica que los polos del observador son, en este caso, las $n - m + n_d$ raíces de la ecuación:

$$E(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{obs}}) = \det \left(\begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{J}_o\mathbf{A}_{12} & \mathbf{J}_o\mathbf{B}_1\mathbf{C}_d - \mathbf{B}_2\mathbf{C}_d \\ \mathbf{J}_d\mathbf{A}_{12} & s\mathbf{I}_{n_d} - \mathbf{A}_d + \mathbf{J}_d\mathbf{B}_1\mathbf{C}_d \end{bmatrix} \right) \quad (3.1.24)$$

Sin embargo, para aprovechar las ideas vistas en secciones anteriores, es conveniente expresar de otra forma la ecuación de polos del observador. La forma que interesa es aquella que permita situar los polos del observador arbitrariamente sobre el plano complejo al elegir la ganancia \mathbf{J} definida en (3.1.15). La siguiente expresión permite usar herramientas tradicionales para la síntesis, como el comando **place** de MATLAB:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{obs}}) = \det \left(s\mathbf{I}_{n-m+n_d} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_d \\ 0 & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_o \\ \mathbf{J}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_d \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.1.25)$$

Es importante notar que esta expresión **no** permite elegir separadamente la dinámica de la estimación de los estados de la planta y la de los estados del modelo de las perturbaciones.

3.1.2. Realimentación del estado

Al observar con detención la ecuación (3.1.17), se aprecia que la salida del observador depende de su estado $\mathbf{q}(t)$ y de la salida de la planta $\mathbf{y}(t)$, que actúa como entrada del observador. Es más, si la ecuación (3.1.17) se reescribe usando (3.1.21) y (3.1.22), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_2(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1(t) \\ \mathbf{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J}_o \\ \mathbf{J}_d \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{q}_1(t) + \mathbf{J}_o \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{q}_2(t) + \mathbf{J}_d \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} \quad (3.1.26)$$

donde queda de manifiesto que los estados del observador de orden reducido corresponden a:

- la relación que se establece entre los estados de la planta que se estiman y su salida:

$$\mathbf{q}_1(t) = \hat{\mathbf{x}}_2(t) - \mathbf{J}_o \mathbf{y}(t) \quad (3.1.27)$$

- la relación que se establece entre la estimación de los estados del modelo de las perturbaciones de entrada:

$$\mathbf{q}_2(t) = \hat{\mathbf{x}}_d(t) - \mathbf{J}_d \mathbf{y}(t) \quad (3.1.28)$$

La realimentación del estado estimado por el observador de orden reducido se hace de forma de conjugar la dinámica de lazo cerrado deseada, al situar arbitrariamente los polos de lazo cerrado, con la compensación de las perturbaciones de entrada. Naturalmente, interesa aprovechar la estimación de estas perturbaciones $\hat{\mathbf{x}}_d(t)$, entregada por el observador.

Al cerrar el lazo, realimentando el estado estimado como en el esquema de la Figura 2.1 (pág.29), la relación que se establece es (2.2.1). Sin embargo, ésta no es la entrada *verdadera* a la planta, pues se deben considerar las perturbaciones como lo muestra la ecuación (3.1.7). Por tanto, la entrada verdadera a la planta es:

$$\mathbf{u}_p(t) = \underbrace{\mathbf{r}(t) - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)}_{\mathbf{u}(t)} + \mathbf{d}(t) \quad (3.1.29)$$

De modo que, usando la partición del estado estimado por el observador definida en (3.1.26) y particionando la ganancia de realimentación de la forma:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2 \quad \mathbf{K}_d] \quad (3.1.30)$$

se obtiene:

$$\mathbf{u}_p(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{K}_1 \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{K}_2 \hat{\mathbf{x}}_2(t) - \mathbf{K}_d \hat{\mathbf{x}}_d(t) + \mathbf{d}(t) \quad (3.1.31)$$

donde claramente es conveniente escoger $\mathbf{K}_d = \mathbf{C}_d$, de manera que:

$$\mathbf{u}_p(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{K}_1 \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{K}_2 \hat{\mathbf{x}}_2(t) + (\mathbf{d}(t) - \underbrace{\mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_d(t)}_{\hat{\mathbf{d}}(t)}) \quad (3.1.32)$$

Es decir, en la medida que la estimación de las perturbaciones sea exacta, se podrá compensar totalmente su presencia en la entrada de la planta, si se elige una ganancia de realimentación de la forma:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_o \quad \mathbf{C}_d] \quad ; \quad \mathbf{K}_o \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad , \quad \mathbf{C}_d \in \mathbb{R}^{m \times n_d} \quad (3.1.33)$$

en que, a su vez:

$$\mathbf{K}_o = [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2] \quad ; \quad \mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad , \quad \mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)} \quad (3.1.34)$$

3.1.3. Controlador equivalente

Naturalmente que, además de mostrar que es posible compensar las perturbaciones de entrada a una planta, estimándolas con un observador de orden reducido, interesa obtener la equivalencia entre este esquema de realimentación del estado observado con un esquema clásico de control, en que sólo se realimenta la salida de la planta. La equivalencia que se busca establecer es análoga a aquella deducida en las secciones §2.2 y §3.2.

Lema 16. *Si se considera el sistema ampliado (3.1.8)-(3.1.9) y se realimenta según (3.1.32) su estado estimado a través del observador de orden reducido asociado (3.1.16)-(3.1.17) y la realimentación, entonces los polos del controlador equivalente son las raíces de:*

$$\det(s\mathbf{I}_{n+n_d-m} - \mathbf{A}_c) = \det(s\mathbf{I}_{n-m} + \mathbf{J}_o(\mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_2) - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}_2) \cdot \det(s\mathbf{I}_{n_d} - \mathbf{A}_d) \quad (3.1.35)$$

Demostración

En la Sección §2.2, se determinó que cuando se realimenta el estado de un sistema usando el observador de orden reducido, el controlador equivalente (2.2.14) está dado por la expresión:

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{C}_c (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c \quad (3.1.36)$$

en que las matrices son:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.1.37)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (3.1.38)$$

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.1.39)$$

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (3.1.40)$$

Sin embargo, en esta sección el modelo de la planta se ha ampliado para incluir las perturbaciones de entrada, y aprovechar la estimación que entrega el observador para compensarlas. Si se utilizan las particiones hechas anteriormente de las matrices de la planta, de la ganancia del observador y de la ganancia de realimentación, entonces la matriz \mathbf{A}_c del controlador puede simplificarse de la forma:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_o & \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{J}_d & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_d \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_d \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2 \quad \mathbf{C}_d] \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.1.41)$$

$$= \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_o & \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{J}_d & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_2 & 0 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.1.42)$$

$$= \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_o(\mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_2) + \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2 & 0 \\ -\mathbf{J}_d(\mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_2) & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \quad (3.1.43)$$

Se puede apreciar que los autovalores de esta matriz, triangular inferior definida por bloques, corresponden a los autovalores de los bloques de la diagonal, lo que es consistente con ecuación (3.1.35).

□□□

El Lema anterior establece que los $n - m + n_d$ polos del controlador son la unión de

- los $n - m$ polos obtenidos en (2.2.56) (pág. 37) para el controlador equivalente en el caso en que no modelan las perturbaciones de entrada, a los que se agregan

- los n_d polos del modelo de estas perturbaciones, dados por la matriz \mathbf{A}_d .

Es importante destacar que esta ecuación permite apreciar que si las perturbaciones de entrada a la planta que se modelan son constantes, entonces el controlador equivalente tendrá polos en $s = 0$. Esta observación sirve de base para una de las estrategias usadas en la Sección §3.2 para obtener un controlador equivalente con integración, a través del modelado de perturbaciones de entrada constantes.

3.1.4. Prefiltro de la referencia

La referencia en el lazo de realimentación del estado no es la misma que se considera en el lazo de control clásico. La primera referencia, correspondiente al lazo de realimentación del estado observado, debe ser filtrada, de manera que ambos esquemas sean completamente equivalentes.

El prefiltro necesario para la señal de referencia está dado por la ecuación (2.2.19). Si se considera el modelo ampliado de la planta y las particiones de la matriz \mathbf{A} y de las ganancias \mathbf{J} y \mathbf{K} , el prefiltro es:

$$\mathbf{F}_r(s) = \mathbf{C}_f(s\mathbf{I}_{n-m+n_d} - \mathbf{A}_f)^{-1}\mathbf{B}_f + \mathbf{D}_f \quad (3.1.44)$$

donde:

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_o & \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ -\mathbf{J}_d & 0 & \mathbf{I}_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_d \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_d \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n_d} \end{bmatrix} \quad (3.1.45)$$

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_o & \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ -\mathbf{J}_d & 0 & \mathbf{I}_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_d \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_d \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J}_o \\ \mathbf{J}_d \end{bmatrix} \quad (3.1.46)$$

$$\mathbf{C}_f = [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2 \quad \mathbf{C}_d] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n_d} \end{bmatrix} \quad (3.1.47)$$

$$\mathbf{D}_f = [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2 \quad \mathbf{C}_d] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J}_o \\ \mathbf{J}_d \end{bmatrix} \quad (3.1.48)$$

En general, este filtro será bipropio, pues posee una matriz de paso directo \mathbf{D}_f no nula, a excepción de alguna combinación especial de valores en las matrices de ganancia. Sus polos, en tanto, son las $n - m + n_d$ soluciones de

$$\det \left(s\mathbf{I}_{n-m+n_d} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_o & \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ -\mathbf{J}_d & 0 & \mathbf{I}_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_d \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_d \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n_d} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.1.49)$$

3.1.5. Polos de lazo cerrado

En las secciones anteriores, tanto para el caso del esquema de realimentación del estado usual, así como en el que se incluye integración, se ha obtenido que los polos de lazo cerrado del sistema de control cumplen con el Principio de Separación. Esto es, parte de estos polos quedan determinados por la ganancia del observador, mientras que los restantes quedan fijados por la ganancia de realimentación del estado. Para este caso, en que se incluyen las perturbaciones en el modelo de la planta a controlar, se tiene un resultado similar dado por el siguiente Lema:

Lema 17. *Para el sistema ampliado definido por las ecuaciones (3.1.8)-(3.1.9), cuyo estado se estima con el observador de orden reducido (3.1.16)-(3.1.17) y con la realimentación de la Figura 1.3, los polos de lazo cerrado son las soluciones de la ecuación:*

$$\det \left(s\mathbf{I}_{n-m+n_d} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_d \\ 0 & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_o \\ \mathbf{J}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_d \end{bmatrix} \right) \cdot \det (s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_o + \mathbf{B}_o\mathbf{K}_o) \cdot \det (s\mathbf{I}_{n_d} - \mathbf{A}_d) = 0 \quad (3.1.50)$$

Demostración

En el Lema 14 se estableció que para un esquema de control por realimentación del estado estimado como el de la Figura 1.3, en que el observador es de orden reducido, los polos de lazo cerrado están dados por la ecuación (2.2.2). Es decir, son las soluciones de la ecuación:

$$\underbrace{\det \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)}_{\text{Polos del observador}} \det (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = 0 \quad (3.1.51)$$

Los polos del observador son las $n - m + n_d$ soluciones que se obtienen en la ecuación (3.1.25), que corresponde al primer determinante en la ecuación (3.1.50).

En tanto, el segundo determinante se puede desarrollar usando las particiones antes definidas para las matrices involucradas:

$$\det (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = \det \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_d \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_d \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{C}_d \end{bmatrix} \right) \quad (3.1.52)$$

$$= \det \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_1\mathbf{K}_2 & 0 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \right) \quad (3.1.53)$$

Se aprecia que la matriz dentro del determinante es diagonal por bloques, por lo tanto sus autovalores son la unión de los autovalores de los bloques en la diagonal. Esto implica que:

$$\det(s\mathbf{I}_{n+n_d} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_o + \mathbf{B}_o\mathbf{K}_o) \det(s\mathbf{I}_{n_d} - \mathbf{A}_d) \quad (3.1.54)$$

Es decir, se tienen $n + n_d$ polos de lazo cerrado además de los del observador. Esto completa además la demostración de la ecuación (3.1.50).

□□□

El Lema anterior establece una vez más el **Principio de Separación** para los polos del sistema completo en lazo cerrado, con la salvedad que se agregan los polos del modelo de las perturbaciones, que naturalmente no se pueden desplazar pues son señales exógenas al sistema. Se tienen por tanto $2(n + n_d) - m$ polos de lazo cerrado, separados en los siguientes subconjuntos:

- $n - m + n_d$ quedan determinados por la ganancia \mathbf{J} del observador (ver ecuación (3.1.25)),
- n quedan determinados por la ganancia \mathbf{K}_o de la realimentación del estado (ecuación (3.1.54)), y
- n_d quedan determinados por el modelo de las perturbaciones (también ecuación (3.1.54)), que describe señales externas al sistema.

Se presenta a continuación un ejemplo que permite apreciar las ideas discutidas en esta sección.

Ejemplo 3. *Se considera un sistema SISO, de orden 3, expresado por su función de transferencia:*

$$G(s) = \frac{s + 50}{(s + 5)(s^2 + 2s + 10)} \quad (3.1.55)$$

Sus polos se ubican en:

$$\lambda_1 = -5 \quad ; \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm j3 \quad (3.1.56)$$

El sistema se expresa en la forma (2.1.6)-(2.1.7):

$$\dot{\mathbf{x}}_o(t) = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 0 \\ -20 & 0 & 1 \\ -50 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_o(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 50 \end{bmatrix} \mathbf{u}_p(t) \quad (3.1.57)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_o(t) \quad (3.1.58)$$

Es decir, las matrices de la representación de estado son:

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 0 \\ -20 & 0 & 1 \\ -50 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 50 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{C}_o = [1 \quad 0 \quad 0] \quad ; \quad \mathbf{D}_o = 0 \quad (3.1.59)$$

En este caso, se suponen perturbaciones sinusoidales que pueden ser modeladas como

$$\dot{\mathbf{x}}_d(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d \\ -\omega_d & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_d(t) \quad (3.1.60)$$

$$d(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}_d(t) \quad (3.1.61)$$

Los modos naturales de un sistema de este tipo son $\cos(\omega_d t)$ y $\sin(\omega_d t)$, por tanto su salida es una senoide de frecuencia ω_d , cuya amplitud y fase estarán dadas por las condiciones iniciales. Se considera el caso $\omega_d = 5[\text{rad/s}]$, con lo que las matrices resultantes son:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{C}_d = [1 \quad 0] \quad (3.1.62)$$

El sistema ampliado, incluyendo estas perturbaciones, queda expresado según las ecuaciones (3.1.8)-(3.1.9):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -50 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.1.63)$$

$$\mathbf{y}(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}(t) \quad (3.1.64)$$

Los autovalores de este sistema aumentado son la unión de los polos de la planta y aquellos del modelo de las perturbaciones, es decir:

$$\lambda_1 = -5 \quad ; \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm j3 \quad ; \quad \lambda_{4,5} = \pm j5 \quad (3.1.65)$$

Para diseñar el observador, la ganancia \mathbf{J} , definida en (3.1.15), se elige de modo que la velocidad de la estimación sea mayor que la de los modos del sistema ampliado. Por esto se obtiene \mathbf{J}_o y \mathbf{J}_d a partir de la ecuación (3.1.25) fijando los $n - m + n_d = 3 - 1 + 2 = 4$ polos del observador en $s = -6, -7, -8, -9$:

$$\det \left(s\mathbf{I}_4 - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = (s+6)(s+7)(s+8)(s+9) \quad (3.1.66)$$

Esta ecuación se resuelve para las variables j_1, j_2, j_3 y j_4 , y se obtiene:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 30,0000 \\ 290,3065 \\ 19,6935 \\ -16,9347 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}_o = \begin{bmatrix} 30,0000 \\ 290,3065 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{J}_d = \begin{bmatrix} 19,6935 \\ -16,9347 \end{bmatrix} \quad (3.1.67)$$

Para elegir la ganancia de realimentación \mathbf{K}_o para el lazo de control, se considera la ecuación (3.1.54). En ésta se aprecia el efecto de \mathbf{K}_1 y \mathbf{K}_2 sobre la ubicación de los polos de lazo cerrado. Se debe recordar que estos polos están determinados de manera disjunta por la ganancia del observador, la ganancia de realimentación y por el modelo de las perturbaciones, de manera separada.

Es decir, se toma la ecuación:

$$\det (s\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0 [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2]) = 0 \quad (3.1.68)$$

En esta ecuación, se sitúan los polos de lazo cerrado arbitrariamente sobre el plano complejo; sin embargo, la ganancia de realimentación también se podría elegir en base a algún criterio de control óptimo.

En este caso, se obtiene \mathbf{K}_o resolviendo la ecuación:

$$\det \left(s\mathbf{I}_3 - \begin{bmatrix} -7 & 1 & 0 \\ -20 & 0 & 1 \\ -50 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right) = (s+10)(s+7-j)(s+7+j) \quad (3.1.69)$$

Al resolver la ecuación para las variables k_1, k_2 y k_3 , se obtiene:

$$\mathbf{K}_o = [-4,8552 \quad 1,1171 \quad 0,3177] \quad \begin{cases} \mathbf{K}_1 = -4,8552 \\ \mathbf{K}_2 = [1,1171 \quad 0,3177] \end{cases} \quad (3.1.70)$$

El controlador equivalente se obtiene a partir de la ecuación (3.1.36), en que las matrices son las definidas en las ecuaciones (3.1.37)-(3.1.40). La función de transferencia que se obtiene para el controlador es:

$$C(s) = 140,582 \frac{(s+4,999)(s+,830)(s^2+4,191s+20,536)}{(s^2+1,701 \cdot 10^{-9}s+25,000)(s^2+47,002s+730,481)} \quad (3.1.71)$$

Si se observa el primer paréntesis del denominador del controlador, la magnitud del término que acompaña a s es muy pequeña. Por tanto se puede conjeturar que sólo aparece este término central debido a errores numéricos, y corresponde en realidad a un término de la forma $(s^2 + 25)$. Esto pone de manifiesto el Principio del Modelo Interno, ya que como se aprecia en la ecuación (3.1.35), en los polos del controlador equivalente deben aparecer las frecuencias naturales del modelo de la perturbación.

Análogamente al controlador anterior, se obtiene el prefiltro de la referencia a partir de la ecuación (3.1.44):

$$F(s) = 140,582 \frac{(s + 4,999)(s + ,830)(s^2 + 4,191s + 20,536)}{(s + 9,004)(s + 7,988)(s + 7,012)(s + 5,996)} \quad (3.1.72)$$

Se aprecia la existencia de imprecisiones numéricas pues, según la ecuación (2.2.19), este prefiltro tiene los mismos polos que el observador de orden reducido.

Los polos de lazo cerrado, como se mencionó anteriormente, son la unión de los dados por el observador, por la realimentación del estado observado y por el modelo de las perturbaciones. Es decir, son las raíces del polinomio:

$$A_{cl}(s) = \overbrace{(s + 6)(s + 7)(s + 8)(s + 9)}^{\text{debidos a } \mathbf{J}} \cdot \underbrace{(s + 10)(s + 7 - j)(s + 7 + j)}_{\text{debidos a } \mathbf{K}} \cdot \underbrace{(s + 5j)(s - 5j)}_{\text{debidos a } \mathbf{A_d}} \quad (3.1.73)$$

Se realizaron simulaciones en MATLAB-SIMULINK usando el esquema de la Figura 3.2, el cual contiene los dos esquemas de control: el de realimentación del estado observado, en la parte superior, y el de control clásico, en la parte inferior.

Se usó una perturbación $d(t) = \sin(5t)$. Para poder apreciar el efecto de los polos de lazo cerrado sobre la parte transiente de la respuesta del sistema, se supuso condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = [0, 0, 10]^T$ para la planta. Además, se usó un escalón en la referencia del sistema, para comparar el comportamiento de ambos lazos de control ante perturbaciones y cambios en la referencia.

En la Figura 3.3 se muestran los datos recogidos en la simulación, que resultan ser iguales para el esquema de realimentación del estado, y para el lazo con controlador equivalente. Se observa que al introducir el escalón de referencia, se produce un error en estado estacionario distinto de cero, debido a que el esquema de control no asegura integración.

Además, en la Figura 3.4, se muestra la perturbación sobre la entrada de la planta y la estimación de ella que hace el observador. En ésta, puede apreciarse el error transiente en la estimación, para después seguirla perfectamente, incluso cuando se produce el escalón en la referencia.

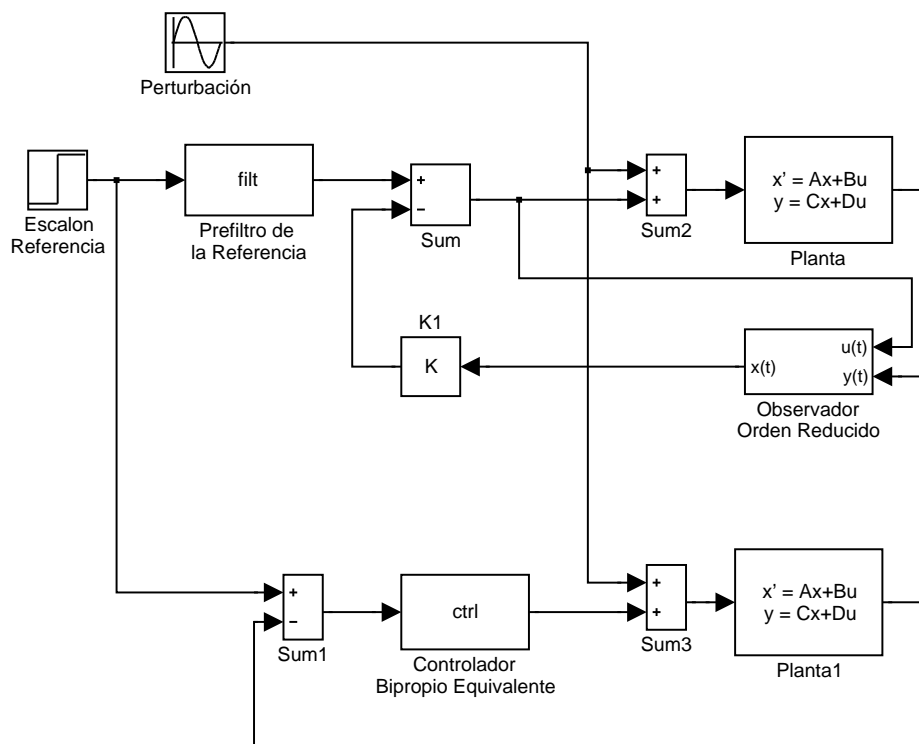


Figura 3.2. Modelo SIMULINK-MATLAB

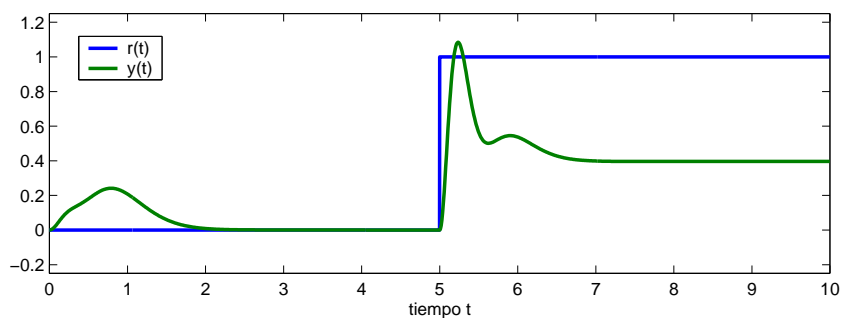


Figura 3.3. Resultado de las simulaciones

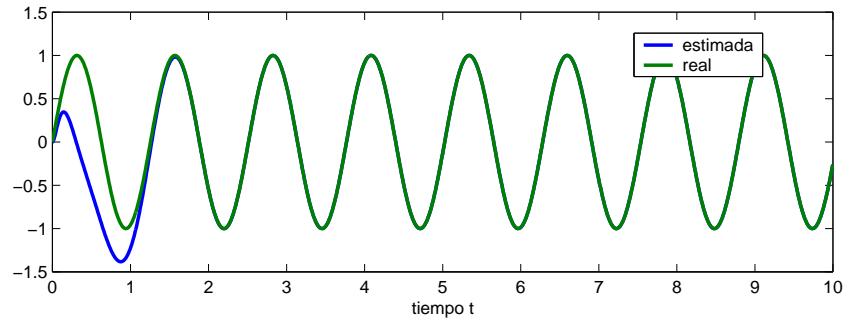


Figura 3.4. Comparación de la perturbación real y estimada

3.2. Integración en el controlador equivalente

A partir de la Sección §2.2 se ha revisado el uso del observador de Luenberger o de orden reducido en un esquema de control por realimentación del estado estimado, mencionando repetidamente que su principal consecuencia y ventaja es que permite obtener un controlador bipropio en un lazo de control clásico equivalente. Este hecho es el que sugiere que un lazo de control clásico con controlador bipropio, por ejemplo un PI, puede ser interpretado como un esquema de realimentación del estado observado. Esta equivalencia se estudia más adelante en el Capítulo 4.

Sin embargo, hasta el momento se ha demostrado que el controlador equivalente puede ser bipropio, pero no que asegura error estacionario cero a referencia constante. Esto es natural, pues el esquema de realimentación del estado observado tampoco lo hace.

Los polos del controlador equivalente, dados por la ecuación (2.2.56), son consecuencia de la elección de las matrices de ganancia \mathbf{J} y \mathbf{K} , del observador y la realimentación del estado, respectivamente. A su vez, estas ganancias fijan los polos del sistema en lazo cerrado, de acuerdo a la ecuación (2.2.2). Para sistemas multivariables (*MIMO*) esta ecuación posee **grados de libertad** en la elección de los coeficientes de las matrices de ganancia, lo cual no sucede en sistemas escalares (*SISO*). Por lo tanto, en éstos últimos una vez que se obtiene el valor de estas ganancias \mathbf{J} y \mathbf{K} , al asignar polos de lazo cerrado, el controlador queda inmediatamente determinado en su totalidad, sin asegurar que tenga integración. En sistemas multivariables, en cambio, existen infinitos posibles controladores que fijan los mismos polos de lazo cerrado, como se muestra más adelante en la Sección §4.3.

Para lograr un sistema de control por realimentación del estado observado, en que el controlador equivalente continúe siendo **bipropio** y además tenga **integración**, se proponen dos métodos posibles:

- Usar un esquema como el de la Figura 3.5, en que al mismo sistema propuesto en la Sección §2.2, se le ha agregado un *lazo externo de realimentación* que

incluye m integradores en paralelo y con matriz de ganancia \mathbf{L} .

- Suponer m perturbaciones constantes en la entrada de planta, una en cada canal, e incluirlas en un modelo ampliado de la planta. Tal como se describe en la sección §3.1, éstas perturbaciones pueden ser estimadas por el observador y compensadas perfectamente eligiendo una ganancia de realimentación \mathbf{K} adecuada.

A continuación se estudian ambas posibilidades.

3.2.1. Integradores en paralelo

Este esquema, que se representa en la Figura 3.5, agrega al lazo de realimentación del estado observado un lazo externo con un integrador y una matriz de ganancia \mathbf{L} . Este último corresponde en realidad a m integradores en paralelo, uno en cada canal para sistemas multivariables.

Al igual que en el esquema de la Figura 1.7, la señal de referencia $\bar{\mathbf{r}}(t)$ que aparece como entrada en el lazo de la Figura 3.5 corresponde a una señal exógena que se relaciona mediante un prefiltro con la referencia $\mathbf{r}(t)$ de un lazo de control clásico equivalente. Este prefiltro resulta tener ganancia a continua unitaria, como se muestra en el Lema 20, ya que si la referencia es constante el integrador asegura que, en estado estacionario, $\mathbf{r}_\infty = \mathbf{y}_\infty = \bar{\mathbf{r}}_\infty$.

El integrador puede representarse en variables de estado mediante las ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = 0 \cdot \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{e}(t) \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}_i(t) \quad (3.2.2)$$

La entrada del integrador es error entre la señal de referencia y la salida de la planta, es decir, $\mathbf{e}(t) = \bar{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{y}(t)$, su estado es $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^m$ y su salida es $\mathbf{z}(t)$, que actúa como entrada al lazo interior de realimentación del estado.

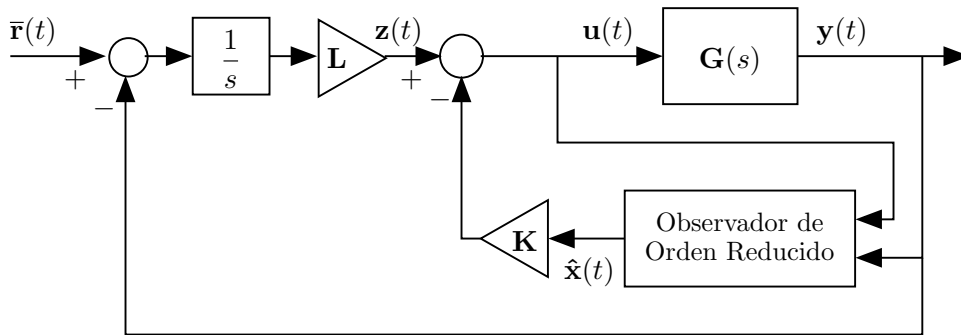


Figura 3.5. Esquema de control con integración

Polos de lazo cerrado

Al igual que en secciones anteriores, para el esquema de control propuesto en la Figura 3.5 interesa obtener los polos del sistema completo en lazo cerrado. Estos polos son los que determinan la estabilidad y dinámica del sistema completo.

Lema 18. *Si se considera el esquema de control de la Figura 3.5, en que la planta está representada por su modelo en variables de estado (2.1.6)-(2.1.7) y el observador de orden reducido está definido por las ecuaciones (2.1.26)-(2.1.27), donde se reemplaza $\bar{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{z}(t)$, entonces:*

(i) *Los polos del sistema completo en lazo cerrado son las $2n$ raíces del polinomio*

$$A_{cl}(s) = \frac{1}{s^{n-m}} \det \left(s^2 \mathbf{I}_n - s(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + \mathbf{BL} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \det (s \mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{JA}_{12}) \quad (3.2.3)$$

(ii) *El error de estimación del observador $\tilde{\mathbf{x}}_2(t)$ **no es controlable** desde la señal de referencia $\bar{\mathbf{r}}(t)$.*

Demostración

Para la demostración se utiliza la representación en variables de estado del lazo interior donde se hace la realimentación del estado observado. Es decir, se consideran las ecuaciones (2.2.11)-(2.2.12), donde ha hecho $\bar{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{z}(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) & \mathbf{BK} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \\ 0 & [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) \quad (3.2.4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

Este sistema se encuentra conectado en serie con el integrador y realimentado negativamente, por tanto se pueden combinar ambos modelos en variables de estado usando la Propiedad 11 en el Apéndice B. Así se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} & \mathbf{BL} \\ 0 & [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} & 0 \\ -[\mathbf{I}_m \quad 0] & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \\ \mathbf{x}_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \bar{\mathbf{r}}(t) \quad (3.2.6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_m \quad 0] & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \\ \mathbf{x}_i(t) \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

(i) Los polos de lazo cerrado son los autovalores de la matriz principal definida por bloques. Estos se pueden calcular utilizando la Propiedad 4 en el Apéndice A:

$$A_{cl}(s) = \det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & -\mathbf{BL} \\ 0 & s\mathbf{I} - [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & 0 \\ [\mathbf{I} \quad 0] & 0 & s\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

$$= \det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & s\mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (3.2.9)$$

$$\det \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} - \begin{bmatrix} -\mathbf{BK} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & -\mathbf{BL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & s\mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \quad 0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.2.10)$$

El determinante de la matriz diagonal definida por bloques es el producto de los determinantes de cada bloque. Además, para obtener su inversa, basta invertir cada uno de los bloques. De esta forma, simplificando, se tiene:

$$A_{cl}(s) = \det \left(s\mathbf{I} - [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \cdot \det(s\mathbf{I}). \quad (3.2.11)$$

$$\det \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \begin{bmatrix} \mathbf{BK} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & \mathbf{BL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ (s\mathbf{I})^{-1} [\mathbf{I} \quad 0] \end{bmatrix} \right) \quad (3.2.12)$$

$$= s^m \det \left(s\mathbf{I} - [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \det \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \frac{1}{s} \mathbf{BL} [\mathbf{I} \quad 0] \right) \quad (3.2.13)$$

Luego, factorizando por s^{-1} dentro del último determinante, donde las matrices son de orden n , y sacando este factor fuera del determinante, se obtiene:

$$A_{cl}(s) = \frac{1}{s^{n-m}} \det \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \det (s^2\mathbf{I} - s(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + \mathbf{BL} [\mathbf{I} \ 0]) \quad (3.2.14)$$

Se debe hacer notar el término $\mathbf{BL}[\mathbf{I}_m \ 0]$, que se ubica en último lugar del segundo determinante, es una matriz singular, por lo tanto, la ecuación:

$$\det (s^2\mathbf{I} - s(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + \mathbf{BL} [\mathbf{I} \ 0]) = 0 \quad (3.2.15)$$

tiene $n - m$ soluciones en $s = 0$. Por esta razón se ha mantenido escrito explícitamente el primer término en (3.2.3), de manera de hacer explícita la cancelación que se produce. De esta forma se demuestra la ecuación (3.2.3), particionando \mathbf{A} como en (2.1.15) en la página 25.

- (ii) En la ecuación (3.2.6) se puede apreciar que la señal de referencia $\bar{\mathbf{r}}(t)$ no tiene influencia alguna sobre las variables de estado correspondientes a $\tilde{\mathbf{x}}_2(t)$, por lo tanto, no son controlables. Cambiando de orden las variables dentro del vector de estado podría llegarse exactamente a la forma (1.1.17), en que $\tilde{\mathbf{x}}_2(t)$ corresponde a la parte no controlable del estado del sistema.

□□□

Del Lema anterior se desprende que para el esquema de control de la Figura 3.5 se cumple, como ha sucedido en casos anteriores, el Principio de Separación en la ecuación de polos de lazo cerrado dado por la ecuación (3.2.3), pues de los $2n$ polos:

- $n - m$ dependen sólo de la ganancia \mathbf{J} del observador de orden reducido, y de hecho son los mismos polos de este observador, mientras que
- $n + m$ dependen sólo de las ganancias de realimentación \mathbf{K} en el lazo interior y la ganancia \mathbf{L} del integrador en el lazo externo.

Controlador equivalente

Una vez que se han determinado los polos de lazo cerrado para el sistema de control de la Figura 3.5, resta por obtener una expresión para el controlador equivalente. Es decir, al igual que en el caso de la realimentación del estado de la Figura 2.1, se pretende obtener una expresión para el controlador equivalente, que debe resultar bipropio y con integración, en un lazo de control clásico como el de la Figura 2.2.

Precisamente para obtener esta expresión es que se utiliza el controlador equivalente y el prefiltro de la referencia obtenidos para el esquema de la Figura 2.1, que corresponde al lazo interior en la Figura 3.5. De esta forma, se puede interpretar

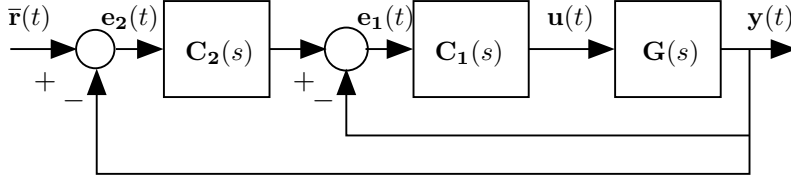


Figura 3.6. Sistema de control en cascada

el esquema con integración antes propuesto como un sistema de control en cascada como sugiere la Figura 3.6.

Para este esquema de controladores en cascada se puede establecer el siguiente Lema:

Lema 19. *El esquema de control en cascada de la Figura 3.6, en que $\mathbf{C}_1(s)$ es el controlador en el lazo interior y $\mathbf{C}_2(s)$ es el controlador en el lazo exterior, es equivalente al esquema de control clásico de la Figura 2.2, donde el controlador equivalente es:*

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{C}_1(s)(\mathbf{I} + \mathbf{C}_2(s)) \quad (3.2.16)$$

Mientras que la referencia $\mathbf{r}(t)$ en la Figura 2.2 se relaciona con $\bar{\mathbf{r}}(t)$ en la Figura 3.6, según la ecuación:

$$\bar{\mathbf{R}}(s) = \mathbf{C}_2(s)^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{C}_2(s))\mathbf{R}(s) \quad (3.2.17)$$

Siempre y cuando $\mathbf{C}_2(s)$ sea invertible.

Demostración

Si se denomina $\mathbf{E}_1(s)$ y $\mathbf{E}_2(s)$ a la entrada al controlador $\mathbf{C}_1(s)$ y $\mathbf{C}_2(s)$, respectivamente, se tiene que:

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{C}_1(s)\mathbf{E}_1(s) \quad (3.2.18)$$

$$= \mathbf{C}_1(s)(\mathbf{C}_2(s)\mathbf{E}_2(s) - \mathbf{Y}(s)) \quad (3.2.19)$$

$$= \mathbf{C}_1(s)(\mathbf{C}_2(s)(\bar{\mathbf{R}}(s) - \mathbf{Y}(s)) - \mathbf{Y}(s)) \quad (3.2.20)$$

$$= \mathbf{C}_1(s)(\mathbf{C}_2(s)\bar{\mathbf{R}}(s) - (\mathbf{I} + \mathbf{C}_2(s))\mathbf{Y}(s)) \quad (3.2.21)$$

$$= \underbrace{\mathbf{C}_1(s)(\mathbf{I} + \mathbf{C}_2(s))}_{\mathbf{C}(s)}(\mathbf{R}(s) - \mathbf{Y}(s)) \quad (3.2.22)$$

donde se ha hecho:

$$\mathbf{C}_2(s)\bar{\mathbf{R}}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{C}_2(s))\mathbf{R}(s) \quad (3.2.23)$$

$$\bar{\mathbf{R}}(s) = \mathbf{C}_2(s)^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{C}_2(s))\mathbf{R}(s) \quad (3.2.24)$$

□□□

Este resultado se utiliza en la demostración del siguiente Lema:

Lema 20. *Si se considera el sistema de la Figura 3.5, en que la planta está dada por su modelo en variables de estado (2.1.6)-(2.1.7) y el observador de orden reducido está definido por las ecuaciones (2.1.26)-(2.1.27), entonces:*

- (i) *Los polos del controlador equivalente para un lazo de control clásico como el de la Figura 2.2 están dados por la ecuación*

$$s^m \det \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.2.25)$$

- (ii) *El prefiltro definido en (3.2.17), que relaciona la referencia $\mathbf{r}(t)$ con $\bar{\mathbf{r}}(t)$, resulta ser impropio y tiene ganancia unitaria a frecuencia cero.*

Demostración

Para obtener una expresión del controlador equivalente al esquema de la Figura 3.5, se utiliza la ecuación (3.2.16) referida al esquema de controladores en cascada de la Figura 3.6. En ésta el controlador del lazo interior corresponde al controlador equivalente antes obtenido que se expresa por la ecuación (2.2.14). Sin embargo, por el momento se deja expresado según la ecuación (2.2.26), es decir:

$$\mathbf{C}_1(s) = (\mathbf{I}_m + \mathbf{KT}_1(s))^{-1} \mathbf{KT}_2(s) \quad (3.2.26)$$

Mientras que el controlador del lazo exterior $\mathbf{C}_2(s)$ es el integrador definido en (3.2.1)-(3.2.2), combinado con el inverso del prefiltro de la referencia obtenido en (2.2.19), para el lazo interior de realimentación del estado. Este prefiltro también se deja expresado por el momento usando la ecuación (2.2.25), por tanto:

$$\mathbf{C}_2(s) = (\mathbf{KT}_2(s))^{-1} \mathbf{L}(s\mathbf{I}_m)^{-1} \quad (3.2.27)$$

En las dos últimas ecuaciones las matrices de transferencia $\mathbf{T}_1(s)$ y $\mathbf{T}_2(s)$ son las definidas en (2.1.39) y (2.1.40), respectivamente, y corresponden a:

$$\mathbf{T}_1(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{B} \quad (3.2.28)$$

$$\mathbf{T}_2(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (3.2.29)$$

Usando las ecuaciones (3.2.26) y (3.2.27) en la ecuación del controlador equivalente (3.2.16), se obtiene:

$$\mathbf{C}_{eq}(s) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{T}_1(s) \right)^{-1} \mathbf{K}\mathbf{T}_2(s) \left(\mathbf{I} + (\mathbf{K}\mathbf{T}_2(s))^{-1} \mathbf{L}(s\mathbf{I})^{-1} \right) \quad (3.2.30)$$

$$= \left[(s\mathbf{I}) (\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{T}_1(s)) \right]^{-1} \left[s\mathbf{K}\mathbf{T}_2(s) + \mathbf{L} \right] \quad (3.2.31)$$

$$= \mathbf{C}_D(s)^{-1} \mathbf{C}_N(s) \quad (3.2.32)$$

A partir de esta expresión resulta muy complejo poder obtener una expresión para el controlador, donde se pueda apreciar claramente sus polos y el efecto de las matrices \mathbf{J} , \mathbf{K} y \mathbf{L} sobre la ubicación de éstos. Por esto es más simple trabajar a partir de la ecuación (3.2.16), utilizando representaciones en variables de estado.

El controlador interior $\mathbf{C}_1(s)$ se representa en variables de estado según la ecuación (2.2.14). Por tanto, en la ecuación (3.2.16) se necesita una representación de estado para el otro factor, $\mathbf{I} + \mathbf{C}_2(s)$, para de esta forma combinarlas en serie usando la Propiedad 9 en el Apéndice B.

Si se considera la definición (3.2.27) de $\mathbf{C}_2(s)$, se puede obtener sin problema la inversa de la transferencia $\mathbf{K}\mathbf{T}_2(s)$:

$$\mathbf{K}\mathbf{T}_2(s) = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (3.2.33)$$

Utilizando la Propiedad 12 en el Apéndice A, se tiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}\mathbf{T}_2(s))^{-1} &= - \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &\quad \left\{ s\mathbf{I} - \left(\begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \right\}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} + \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

$$\begin{aligned} &= - \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \left\{ s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} \mathbf{K} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} + \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

El controlador $\mathbf{C}_2(s)$ es la conexión serie del integrador con $(\mathbf{K}\mathbf{T}_2(s))^{-1}$, cuya expresión recién obtenida puede interpretarse como un modelo de estado. Por tanto, usando la Propiedad 9 del Apéndice B se obtiene una expresión en variables de estado para $\mathbf{C}_2(s)$.

Ahora, si se observa que la representación de estado de $\mathbf{I} + \mathbf{C}_2(s)$, es la misma de $\mathbf{C}_2(s)$ a la que se agrega la identidad \mathbf{I} como matriz de paso directo. De esta forma se obtiene:

$$\mathbf{C}_2(s) + \mathbf{I} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.2.36)$$

en que las matrices son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} & [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} \mathbf{K} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.2.37)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.38)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} & - \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.2.39)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} \quad (3.2.40)$$

Finalmente se obtiene la representación en variables del controlador equivalente con integración, que será la **conexión serie** de $\mathbf{C}_1(s)$ y este último sistema $\mathbf{C}_2(s) + \mathbf{I}$. Usando nuevamente la Propiedad 9, el controlador equivalente resulta:

$$\mathbf{C}_{eq}(s) = \mathbf{C}_i(s\mathbf{I}_{2n-m} - \mathbf{A}_i)^{-1}\mathbf{B}_i + \mathbf{D}_i \quad (3.2.41)$$

Si se define $\mathbf{M} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ y $\mathbf{N} = (\mathbf{K}[\mathbf{I}, \mathbf{J}]^T)^{-1}$, las matrices definidas por bloques son:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{N} & [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{A} \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{N} \mathbf{K} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & 0 \\ [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{N} & -[-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{N} \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] \mathbf{M} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.2.42)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ 0 \\ [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}] (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.2.43)$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.2.44)$$

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (3.2.45)$$

Esta representación obtenida asegura, en primer lugar, que el controlador es bipropio, pues la matriz de paso directo \mathbf{D}_i es, en general, no nula.

También, si se calculan los autovalores de la matriz \mathbf{A}_i triangular inferior por bloques, éstos son las soluciones de:

$$s^m \cdot \det \left(s\mathbf{I}_{n-m} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \cdot \det \left(s\mathbf{I}_{n-m} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} \mathbf{K} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.2.46)$$

Es decir, se tienen:

- m polos en el origen, correspondientes al integrador, o m integradores en paralelo,
- $n - m$ polos, que son los mismos correspondientes al controlador equivalente (2.2.14) del lazo interior de realimentación del estado, y
- $n - m$ polos que coinciden con los del observador de orden reducido (ver (2.1.28)), pero que resultan ser **no observables**, como se muestra a continuación.

Para probar que los polos que aparecen en (3.2.46) y que coinciden con los del observador de orden reducido son no observables, se analiza la matriz de observabilidad del sistema:

$$\mathbf{M}_o(\mathbf{A}_i, \mathbf{C}_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i \\ \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i \\ \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ -\mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} N & \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} N \\ \mathbf{K} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \right)^2 \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \right)^{-1} & -\mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} N^2 & \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} N^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.47)$$

Se ha hecho

$$N = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.2.48)$$

para representar la matriz de manera más simple.

La matriz de observabilidad $\mathbf{M}_o(\mathbf{A}_i, \mathbf{C}_i)$ claramente no tiene rango completo, ya que los bloques en la columna central son linealmente dependientes con los bloques en la columna a la derecha. Esto acusa la presencia de polos no observables, que pueden ser determinados a partir de la realización mínima (3.2.31), que fue obtenida manipulando matrices de transferencia. En esta, los polos del controlador se obtienen encontrando los valores de s que hacen cero el determinante de la matriz denominador $\mathbf{C}_D(s)$. Es decir, se resuelve:

$$\det(\mathbf{C}_D(s)) = \det((s\mathbf{I})(\mathbf{I} + \mathbf{K}\mathbf{T}_1(s))) = s^m \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{B}\right) = 0 \quad (3.2.49)$$

Se puede usar la Propiedad 8 para cambiar el orden de las matrices en el determinante:

$$\begin{aligned} s^m \det\left(\mathbf{I} + \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}\right) \\ = s^m \det\left(\left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}\right)^{-1} \left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}\right)\right) \\ = s^m \det\left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}\right)^{-1} \det\left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}\right) \end{aligned} \quad (3.2.50)$$

Por tanto, los polos del controlador equivalente, completamente observables y controlables, son las n soluciones de la ecuación:

$$s^m \det\left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}\right) = 0 \quad (3.2.51)$$

Esto confirma la ecuación (3.2.25).

Respecto al prefiltro de la referencia que relaciona $\mathbf{R}(s)$ y $\bar{\mathbf{R}}(s)$ se considera la ecuación (3.2.17). A partir de esta, dicho prefiltro puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_r(s) &= (\mathbf{C}_2(s))^{-1} + \mathbf{I}_m = ((\mathbf{K}\mathbf{T}_2(s))^{-1} \mathbf{L}(s\mathbf{I}_m)^{-1})^{-1} + \mathbf{I}_m \\ &= s\mathbf{I}_m \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K}\mathbf{T}_2(s) + \mathbf{I}_m \end{aligned} \quad (3.2.52)$$

Observando esta expresión del prefiltro, se obtienen los dos resultados ya enunciados:

- resulta ser **impropio** pues la transferencia $\mathbf{K}\mathbf{T}_2(s)$ tiene, en general, paso directo y al multiplicarla por $s\mathbf{I}_m$ resulta una transferencia de grado relativo menor que cero.

- el prefiltro tiene ganancia a continua unitaria, pues si se hace $s = 0$ se obtiene $\mathbf{F}_r(0) = \mathbf{I}_m$.

□□□

Dado que el prefiltro (3.2.17) resulta ser impropio o no causal, para implementarlo en la práctica es conveniente agregar un polo rápido en su dinámica, de manera que sea bipropio, sin modificar su ganancia a continua. Para ilustrar la implementación del esquema con integración descrito, se presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4. Se considera nuevamente el sistema utilizado en los ejemplos anteriores:

$$G(s) = \frac{6(-s+1)}{(s+3)(-s+2)} \quad (3.2.53)$$

Su expresión en la forma (2.1.6)-(2.1.7) es:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.2.54)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (3.2.55)$$

La planta es un sistema SISO de orden 2. El observador de orden reducido asociado tiene un único polo, dado por la ecuación (2.1.28):

$$\det \left(s - \begin{bmatrix} -J & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = s + J = 0 \quad (3.2.56)$$

Por tanto, eligiendo $J = 5$, la dinámica del observador será más rápida que los modos naturales de la planta. Esta elección determina además parte de los polos de lazo cerrado en la ecuación (3.2.3). Los restantes están dados por el factor:

$$\frac{1}{s} \cdot \det \left(s^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - s \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} l \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.2.57)$$

$$\frac{1}{s} \cdot s(s^3 + (6k_1 - 6k_2 + 1)s^2 + (-6k_1 + 30k_2 + 6l - 6)s - 6l) = 0 \quad (3.2.58)$$

$$s^3 + (6k_1 - 6k_2 + 1)s^2 + (-6k_1 + 30k_2 + 6l - 6)s - 6l = 0 \quad (3.2.59)$$

Se confirma la existencia de $n - m = 2 - 1 = 1$ cero en el origen, que se cancela, en este caso, con el polo que se mantiene explícitamente escrito en la ecuación (3.2.3).

Se pueden situar los polos de lazo cerrado de manera arbitraria sobre el plano complejo, eligiendo los coeficientes k_1 , k_2 y l . Por ejemplo, si se considera:

$$s^3 + (6k_1 - 6k_2 + 1)s^2 + (-6k_1 + 30k_2 + 6l - 6)s - 6l = (s+2)(s+3)(s+4) \quad (3.2.60)$$

esta ecuación se satisface con $\mathbf{K} = [4, \frac{8}{3}]$ y $\mathbf{L} = -4$. Con esta elección, los controladores del lazo interior y exterior, dados por las ecuaciones (3.2.26) y (3.2.27), respectivamente, son:

$$\mathbf{C}_1(s) = \frac{4(13s + 37)}{3(s - 91)} \quad ; \quad \mathbf{C}_2(s) = \frac{-3(s + 5)}{s(13s + 37)} \quad (3.2.61)$$

El controlador equivalente, dado por (3.2.16), con *integración y bipropio*, es:

$$\mathbf{C}_{eq}(s) = \frac{4(s + 3)(13s - 5)}{3s(s - 91)} \quad (3.2.62)$$

El prefiltro que relaciona las referencias, definido en (3.2.17), queda expresado por

$$\mathbf{F}_r(s) = \frac{-(s + 3)(13s - 5)}{3(s + 5)} \quad (3.2.63)$$

Esto confirma el problema mencionado en la deducción de las expresiones: el prefiltro $\mathbf{F}_r(s)$ resulta ser **impropio**. El problema puede evitarse agregando un polo rápido al prefiltro, preservando la ganancia a continua:

$$\tilde{\mathbf{F}}_r(s) = \frac{-(s + 3)(13s - 5)}{3(s + 5)} \frac{100}{s + 100} \quad (3.2.64)$$

Con estas expresiones se construyó el esquema SIMULINK-MATLAB que se muestra en la Figura 3.7. En el esquema de realimentación del estado e integración, en la parte inferior, y el lazo de control clásico, en la parte superior, la planta tiene un estado inicial $\mathbf{x}_0 = [0,5 \ 0 \ 0]$ y se introduce un escalón unitario en la señal de referencia $\mathbf{r}(t)$ en $t = 4[s]$.

En la Figura 3.8 se muestran los resultados obtenidos en la simulación. En la parte superior se muestra la señal de referencia, así como la entrada y la salida de la planta para el lazo de control clásico y de realimentación del estado con integración. En esta figura no se aprecia diferencia alguna entre las señales de ambos lazos, por lo cual se muestra un detalle ampliado en la parte inferior. En éste se aprecia que las señales del lazo de realimentación del estado ($\mathbf{u}_2(t)$ e $\mathbf{y}_2(t)$) tienen un pequeño retardo respecto a las del lazo de control clásico ($\mathbf{u}_1(t)$ e $\mathbf{y}_1(t)$) debido al polo rápido que se agregó al prefiltro de la referencia.

En ambas figuras puede apreciarse que se cumple claramente el objetivo propuesto en esta sección, pues el lazo de control permite que la salida de la planta siga a la referencia con error cero en estado estacionario, teniendo un controlador equivalente bipropio y con integración.

3.2.2. Modelado de perturbaciones constantes

La segunda estrategia para forzar integración en el controlador equivalente, es suponer que en cada una de las entradas de la planta existe una perturbación cons-

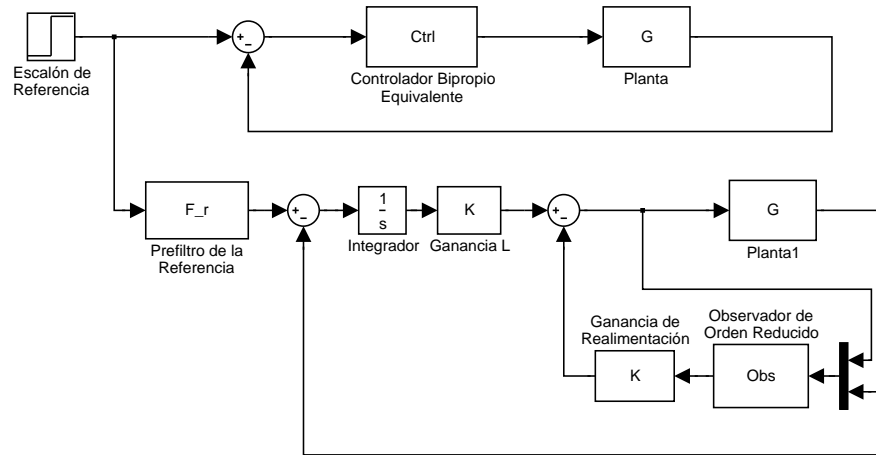


Figura 3.7. Esquema de control clásico y por realimentación del estado con integración.

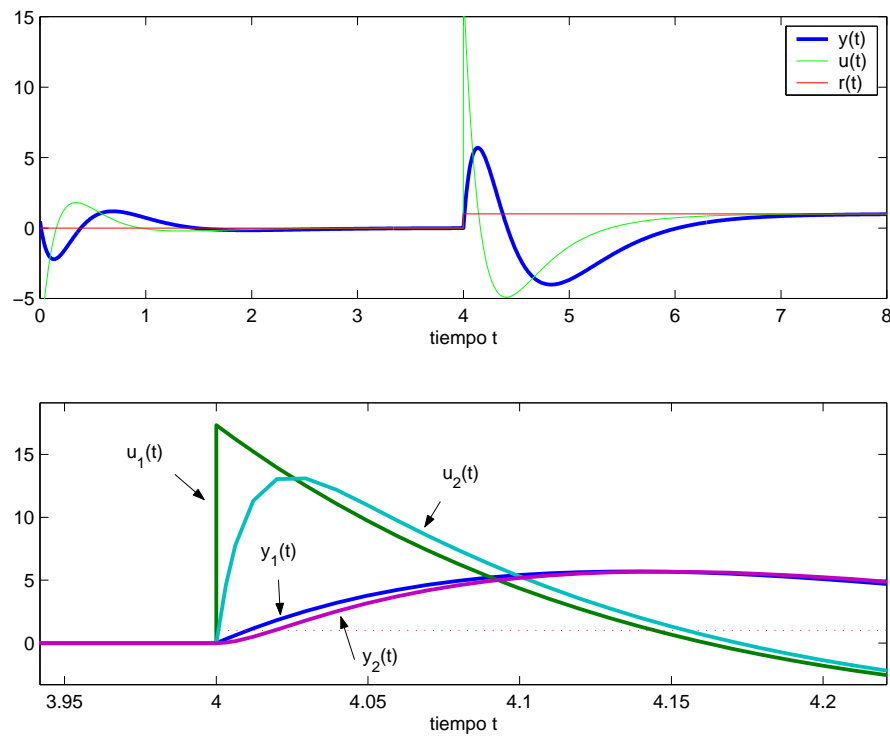


Figura 3.8. Señal de referencia, entrada y salida de la planta, y detalle comparativo.

tante. Una de las ventajas de este método es que no se modifica el esquema de realimentación de estado de la Figura 2.1. La única diferencia consiste en que, al ampliar el modelo de la planta, el observador de orden reducido estima tanto el estado de la planta como las perturbaciones, las cuales son compensadas convenientemente en la realimentación.

Como en secciones anteriores, la planta se supone de orden n , con m entradas y salidas, escrita en la forma (2.1.6)-(2.1.7).

Las perturbaciones de entrada constantes se pueden representar mediante el modelo de estado no controlable, de orden $n_d = m$ y m salidas, definido por las ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{x}}_d(t) = \mathbf{0} \cdot \mathbf{x}_d(t) \quad (3.2.65)$$

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{x}_d(t) \quad (3.2.66)$$

Con este modelo se obtiene una planta ampliada (3.1.8)-(3.1.9), en este caso de orden $n + m$, y en que $\mathbf{A}_d = \mathbf{0}$ y $\mathbf{C}_d = \mathbf{I}_m$.

El observador de orden reducido en este caso estima los $n - m$ estados de la planta, que no aparecen directamente en su salida, y las m perturbaciones. Es decir, el observador tiene n polos, determinados por su matriz de ganancia de la forma:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_o \\ \mathbf{J}_d \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{en que} \quad \begin{cases} \mathbf{J}_o & \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m} \\ \mathbf{J}_d & \in \mathbb{R}^{m \times m} \end{cases} \quad (3.2.67)$$

Al hacer la realimentación del estado estimado por el observador de orden reducido, la matriz de ganancia \mathbf{K} debe permitir compensar perfectamente las perturbaciones de entrada a la planta, a medida que converge en el error de estimación. Es decir, debe ser de la forma:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_o \quad \mathbf{I}_m] \quad ; \quad \text{en que} \quad \mathbf{K}_o \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3.2.68)$$

El controlador equivalente que resulta al incluir este modelado de perturbaciones constantes está dado por las ecuaciones (3.1.36)-(3.1.40), donde puede apreciarse que es bipropio y de orden n . Sus polos en tanto están dados por la ecuación (3.1.35), que en este caso se reduce a:

$$s^m \cdot \det \left(s\mathbf{I}_{n-m} - [-\mathbf{J}_o \quad \mathbf{I}_{n-m}] (\mathbf{A}_o - \mathbf{B}_o \mathbf{K}_o) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.2.69)$$

En esta ecuación se aprecia que estos polos son los del controlador equivalente que se obtendría haciendo la realimentación del estado con las ganancias \mathbf{J}_o y \mathbf{K}_o , a los que se agregan m polos en $s = 0$. Además, si se comparan estos polos con los obtenidos en (3.2.51) al agregar integradores en paralelo, se aprecia que son los mismos.

El prefiltro de la referencia está dado por las ecuaciones (3.1.44)-(3.1.48), que, si bien no pueden simplificarse más de lo que se muestra ahí, permiten observar que este prefiltro es, en general, **bipropio**. Esto representa una ventaja respecto al método de los integradores en paralelo, antes presentado, pues el prefiltro resultante en ese caso, dado por la ecuación (3.2.17) es impropio.

Además de la ventaja respecto al prefiltro de la referencia recién mencionada, esta estrategia resulta más simple, pues una vez que se ha incorporado en el modelo de la planta las perturbaciones constantes, las ecuaciones que necesarias son las mismas usadas en las secciones anteriores.

La única excepción importante es la ganancia de realimentación del estado, que se particiona según la ecuación (3.2.68): una parte queda fijada por el modelo de las perturbaciones, y la otra se calcula para fijar polos de lazo cerrado utilizando el *modelo original* de la planta, como se muestra en (3.1.54)

A continuación se presenta un ejemplo, que permite comparar esta forma de forzar integración con la estrategia antes presentada.

Ejemplo 5. *En el Ejemplo 4 se consideró el sistema:*

$$G(s) = \frac{6(-s+1)}{(s+3)(-s+2)} \quad (3.2.70)$$

cuya expresión en variables de estado es:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.2.71)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (3.2.72)$$

en que se las matrices son:

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.73)$$

Una perturbación de entrada constante se puede modelar como:

$$\dot{\mathbf{x}}_d(t) = 0 \quad (3.2.74)$$

$$d(t) = \mathbf{x}_d(t) \quad (3.2.75)$$

Un sistema de este tipo tiene un único polo en el origen y el modo natural asociado es $d(t) = C$, es decir, su salida es siempre una constante, cuyo valor estará dado por la condición inicial. Es claro que las matrices son:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.76)$$

El sistema ampliado, incluyendo estas perturbaciones, queda expresado según las ecuaciones (3.1.8)-(3.1.9):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.2.77)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (3.2.78)$$

Naturalmente, los autovalores del sistema ampliado son la unión de los de la planta con los del modelo de las perturbaciones, es decir:

$$\lambda_1 = -3 \quad ; \quad \lambda_2 = 2 \quad ; \quad \lambda_3 = 0 \quad (3.2.79)$$

Ahora, para diseñar tanto la ganancia del observador como la de realimentación del estado, se fijan los mismos polos de lazo cerrado que en el ejemplo anterior en la página 66. En esta estrategia, sin embargo, el observador de orden reducido fija $n - m + n_d = 2 - 1 + 1 = 2$ polos y la ganancia de realimentación $n = 2$ polos, además de $n_d = 1$ polo extra que es el del modelo de las perturbaciones, según el Lema 17, en la página 49.

La ganancia \mathbf{J} definida en (3.1.15), se elige de modo que la velocidad de la estimación sea mayor que la de los modos del sistema ampliado. Por esto se obtiene \mathbf{J}_o y \mathbf{J}_d a partir de la ecuación (3.1.25) fijando los $n - m + n_d = 2 - 1 + 1 = 2$ polos del observador en $s = -4$ y $s = -5$:

$$\det \left(s\mathbf{I}_2 - \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_o \\ j_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} \right) = (s + 4)(s + 5) \quad (3.2.80)$$

Esta ecuación se resuelve para las variables j_o y j_d , y se obtiene:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_o \\ j_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -\frac{10}{3} \end{bmatrix} \quad (3.2.81)$$

Para elegir la ganancia de realimentación \mathbf{K} se considera la ecuación (3.1.54). En ésta se aprecia el efecto de $\mathbf{K}_o = [\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2]$ sobre la ubicación de los polos de lazo cerrado:

$$\det (s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_o + \mathbf{B}_o [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2]) = 0 \quad (3.2.82)$$

En este caso, los polos de lazo cerrado se sitúan arbitrariamente sobre el plano complejo, sin embargo, la ganancia de realimentación también se podría elegir en base a algún criterio de control óptimo. Se obtiene \mathbf{K}_o resolviendo la ecuación:

$$\det \left(s\mathbf{I}_2 - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) = (s + 2)(s + 3) \quad (3.2.83)$$

donde se obtiene:

$$\mathbf{K}_o = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (3.2.84)$$

Considerando el modelo de las perturbaciones, la matriz de ganancia de realimentación completa es:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \mathbf{C}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.85)$$

El controlador equivalente se obtiene a partir de la ecuación (3.1.36), en que las matrices son las definidas en las ecuaciones (3.1.37)-(3.1.40):

$$C(s) = 17,333 \frac{(s + 3,000)(s - ,385)}{s(s - 91,000)} = \frac{4 \cdot 13}{3} \frac{(s + 3)(s - \frac{5}{13})}{s(s - 91)} \quad (3.2.86)$$

En el denominador del controlador se pone de manifiesto el Principio del Modelo Interno, ya que como se aprecia en la ecuación (3.1.35), en los polos del controlador equivalente deben aparecer las frecuencias naturales del modelo de la perturbación. Además este controlador coincide con el obtenido en el Ejemplo 4 de la subsección anterior.

Análogamente al controlador anterior, se obtiene el prefiltro de la referencia a partir de la ecuación (3.1.44):

$$F(s) = 17,333 \frac{(s + 3,000)(s - ,385)}{(s + 5,000)(s + 4,000)} = \frac{4 \cdot 13}{3} \frac{(s + 3)(s - \frac{5}{13})}{(s + 5)(s + 4)} \quad (3.2.87)$$

que es bipropio, por tanto, no existe problema en su implementación.

Los polos de lazo cerrado son la unión de los dados por el observador, por la realimentación del estado observado y por el modelo de las perturbaciones, es decir, las raíces del polinomio:

$$A_{cl}(s) = \underbrace{(s + 5) \cdot (s + 4)}_{\text{debidos a } \mathbf{J}} \cdot \underbrace{(s + 3) \cdot (s + 2)}_{\text{debidos a } \mathbf{K}} \cdot \underbrace{s}_{\text{debido a } \mathbf{A}_d} \quad (3.2.88)$$

Se hizo una simulación en MATLAB con el esquema de la Figura 3.9. La planta tiene un estado inicial $\mathbf{x}_o = [0,5, 0]$, la perturbación de entrada es un escalón unitario en $t = 5[s]$ y en la referencia se introduce un escalón unitario en $t = 10[s]$.

Los resultados se muestran en la Figura 3.10. Para ambos lazos se obtuvo la misma señal de salida de la planta, por eso se muestra un solo gráfico. Se observa que ambos lazos de control son capaces de compensar perfectamente la perturbación y siguen la señal de referencia con error estacionario cero.

En tanto, en la Figura 3.11, se compara la perturbación verdadera con la que estima el observador de orden reducido. Se aprecia que la estimación converge rápidamente a la perturbación real, cosa que permite compensarla efectivamente en el lazo de control.

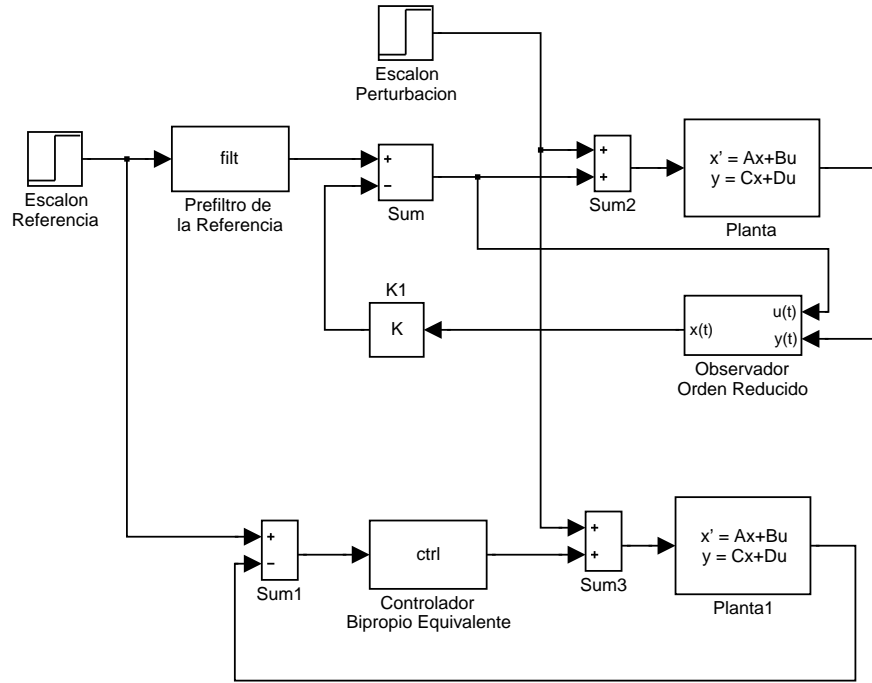


Figura 3.9. Esquema SIMULINK-MATLAB para ambos esquemas de control.

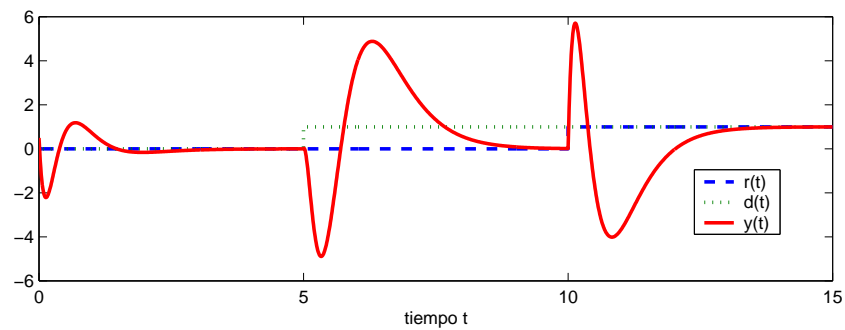


Figura 3.10. Resultados de la simulación

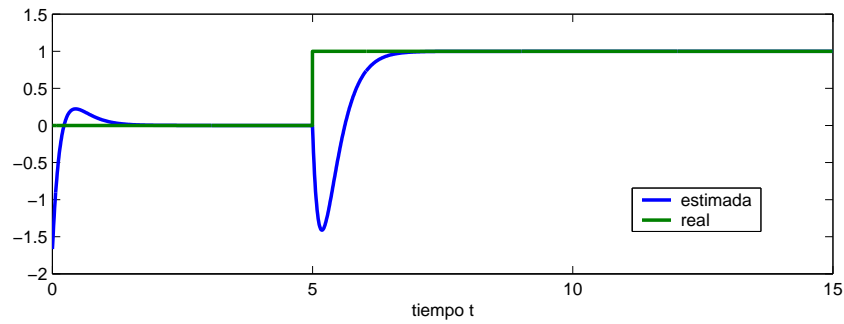


Figura 3.11. Comparación de la perturbación real y estimada

La presencia de undershoot y overshoot apreciables se debe a que la planta es inestable y de fase no mínima, y los polos de lazo cerrado se han escogido bastante más rápidos que la dinámica de la planta. Referencias a estas restricciones fundamentales en sistemas de control se encuentran, por ejemplo, en [5].

CONTROL CLÁSICO Y REALIMENTACIÓN DEL ESTADO

En la introducción al presente trabajo de tesis se destacó como objetivo fundamental el establecer la equivalencia entre el control por realimentación del estado observado y el esquema clásico de control, en que se realimenta sólo la salida de la planta, sin restricciones sobre el grado relativo del controlador.

Hasta el momento, en las secciones previas se ha analizado la realimentación del estado observado mediante un observador de orden reducido, estableciendo que en este caso el controlador equivalente que se obtiene es, en general, bipropio. Esto no es posible de establecer si la observación se hace mediante un observador de orden completo, pues el controlador equivalente en ese caso resulta ser estrictamente propio, tal como se hizo notar en la Sección §1.5.

En esta sección interesa analizar la equivalencia en el sentido inverso al ya revisado. Esto es, a partir del lazo de control clásico, con un controlador de orden arbitrario, bipropio o estrictamente propio, poder interpretarlo como un esquema de realimentación del estado observado a través del observador de orden reducido, y establecer la metodología para hacer explícita la equivalencia.

En primer lugar, se plantean las limitaciones sobre el orden de los sistemas involucrados, planta y controlador, en base a los desarrollos de los capítulos previos. A continuación se plantea un procedimiento para establecer explícitamente la equivalencia entre los esquemas de control clásico y de realimentación del estado observado, definiendo criterios para evitar las limitaciones previamente establecidas. Se revisa el caso de lazos de control escalares (*SISO*) y multivariantes (*MIMO*) separadamente, quedando en evidencia algunas diferencias fundamentales en la forma de establecer la equivalencia.

4.1. Limitaciones

En los desarrollos realizados en la Sección §2.2 se consideró una planta de orden n , con m entradas y salidas, controlada mediante realimentación del estado estimado a través de un observador de orden reducido.

El controlador equivalente obtenido se expresa en la ecuación (2.2.14), en la página 32, y es bipropio y de orden $n - m$.

Los polos de lazo cerrado, son $2n - m$ y se obtienen a partir del polinomio (2.2.2), en la página 29.

Para el caso en que se requiere integración en el controlador, que asegure error cero en estado estacionario entre referencia y salida de la planta, en la Sección §3.2 se revisaron dos posibles alternativas:

- Usar el esquema de la Figura 3.5 en que se agregan *integradores* fuera del lazo de realimentación del estado observado. En este caso el controlador equivalente es de orden n y se tienen $2n$ polos de lazo cerrado.
- Modelar perturbaciones de entrada constantes como se hizo en la Sección §3.1, e incluirlas en la planta. En este caso el controlador equivalente también es de orden n y se determinan $2n - m$ polos de lazo cerrado, pues $n_d = m$ es el orden del modelo de las perturbaciones.

Naturalmente estos casos son restrictivos, pues el orden y el número de entradas y salidas determina en ambas situaciones el orden del controlador. Para evitar estas restricciones se pueden suponer cancelaciones en el controlador en caso que su orden sea menor que el requerido para establecer la equivalencia, o bien ampliar artificialmente el orden de la planta incorporando polos no controlables.

Respecto al grado relativo, el observador de orden reducido también es capaz de interpretar los casos en que el controlador del lazo de control clásico **no es bipropio**, como se ve más adelante. Sin embargo, este caso puede ser perfectamente interpretado a través del observador de orden completo, como puede verse en la literatura ([5]).

4.2. Caso general para sistemas escalares (SISO)

Interesa en este punto tomar el caso de una planta de orden arbitrario, controlada mediante un controlador bipropio e interpretarla en términos de la realimentación de su estado estimado a través de un observador de orden reducido.

Se propone la siguiente metodología general:

1. Se considera una planta de orden n , escrita en la forma (2.1.6)-(2.1.6),
2. Se considera el controlador, bipropio o no, de orden n_c ,

3. Se identifican los $n + n_c$ polos de lazo cerrado, determinados por el sistema realimentado,
4. El esquema de realimentación del estado observado con el observador de orden reducido da origen a un controlador de orden $n - m$, por ende, tenemos los siguientes casos
 - a) Si $n_c < n - m$, entonces existen **infinitos** esquemas de realimentación del estado observado equivalentes al de control clásico, pues la deficiencia de orden del controlador se puede evitar suponiendo *cancelaciones estables* entre polos y ceros del controlador, que corresponde a polos de lazo cerrado. Esto, en la ecuación (2.2.2), da origen a una infinidad de soluciones (\mathbf{J}, \mathbf{K}) ;
 - b) Si $n_c = n - m$, entonces existe un **único** esquema de realimentación del estado equivalente, existiendo variantes sólo en la forma que se asignan los polos de lazo cerrado a las matrices \mathbf{J} y \mathbf{K} , en la ecuación (2.2.2); y
 - c) Si $n_c > n - m$, entonces el esquema de control clásico tiene equivalente mediante realimentación del estado observado **sólo** si se *aumenta* el orden de la planta. Esto conviene realizarlo mediante el Principio del Modelo Interno, es decir, incluyendo n_d perturbaciones *ficticias* como polos no controlables en el modelo de la planta. Estos polos aparecerán en el controlador, cuando se compensa su efecto sobre la entrada usando la realimentación (3.1.33).

El orden del modelo ampliado de la planta debe ser $n^* = n + n_d$, tal que $n_c = n^* - m = n + n_d - m$, como se deduce de la ecuación (3.1.35).

Es importante mencionar que, en general, el modelo de la planta será más compleja que el controlador, o bien, visto desde la perspectiva del diseño de un sistema de control, generalmente se prefiere un controlador lo más simple posible, pues su implementación, sintonía de parámetros y mantención se facilitan. Por esto, el primer caso en que $n_c < n - m$ es probablemente el más común en la práctica.

5. Para determinar el esquema de realimentación del estado observado equivalente se siguen los siguientes pasos:
 - a) Si $n_c < n - m$, entonces se debe aumentar el orden del controlador eligiendo un polinomio estable de orden $n - m - n_c$ que se agrega a su numerador y denominador, dando origen a cancelaciones. De esta forma el nuevo controlador, incluyendo las cancelaciones, es de orden $n_c^* = n - m$. El polinomio cancelado debe ser estable pues aparecerá en el **polinomio característico de lazo cerrado**.

- b) Si $n_c > n - m$, entonces debe aumentarse el orden de la planta incluyendo $n_d = n_c - (n - m)$ polos no controlables. Éstos deben tomarse del denominador del controlador dado, pues al ser compensados mediante la realimentación del estado observado, usando la ganancia (3.1.33), aparecen como polos del controlador equivalente. El orden del modelo ampliado de la planta es $n^* = n + n_d$, con lo que se logra la relación $n_c = n^* - m$. Estos polos *ficticios* pasan a ser polos de lazo cerrado, pero no deben ser asignados a **J** o **K**, pues aparecen al ser compensados en la realimentación según la ecuación (3.1.33).
- c) Hechos los ajustes recién mencionados, en la ecuación (2.2.2) se determina cuáles de los polos de lazo cerrado corresponderán a la ganancia de realimentación **K** y cuáles a la ganancia del observador de orden reducido **J**. Esta asignación puede ser arbitraria, pues el esquema de realimentación del estado observado es sólo un esquema ficticio equivalente. Sin embargo, pueden utilizarse como criterios generales:
- Asignar los polos del observador, de manera que la estimación converja más rápido que los modos naturales de la planta.
 - Asignar los polos debidos a cancelaciones en el controlador, al observador pues corresponden a modos no controlables o no observables, pues no aparecerán en las funciones de transferencia.
 - Si se agregaron polos no controlables al modelo de la planta, como perturbaciones a ser compensadas, éstos pasan a ser polos de lazo cerrado, pero no se asignan directamente a **J** o a **K**, sino que al elegir **K** de la forma (3.1.33) aparecerán directamente en el polinomio característico de lazo cerrado (3.1.50) (pág.49).
- d) Hecha la asignación de polos a cada uno de los polinomios en la ecuación (2.2.2), se calculan las matrices de ganancia **K** y **J**¹.
- e) Puede comprobarse la equivalencia calculando el controlador equivalente mediante la ecuación (2.2.14).
- f) Para verificar la equivalencia entre ambos esquemas mediante una simulación es importante calcular y agregar el prefiltro que relaciona las señales de referencia de cada lazo, definido en la ecuación (2.2.19).

Ejemplo 6. Caso $n_c < n - m$.

Se considera un sistema de control en que la planta es

$$G(s) = \frac{(s+9)(s+5)}{(s-1)(s+2)(s^2+5s+9)} = \frac{s^2+14s+45}{s^4+6s^3+12s^2-s-18} \quad (4.2.1)$$

¹Por ejemplo, usando el comando **place** de MATLAB

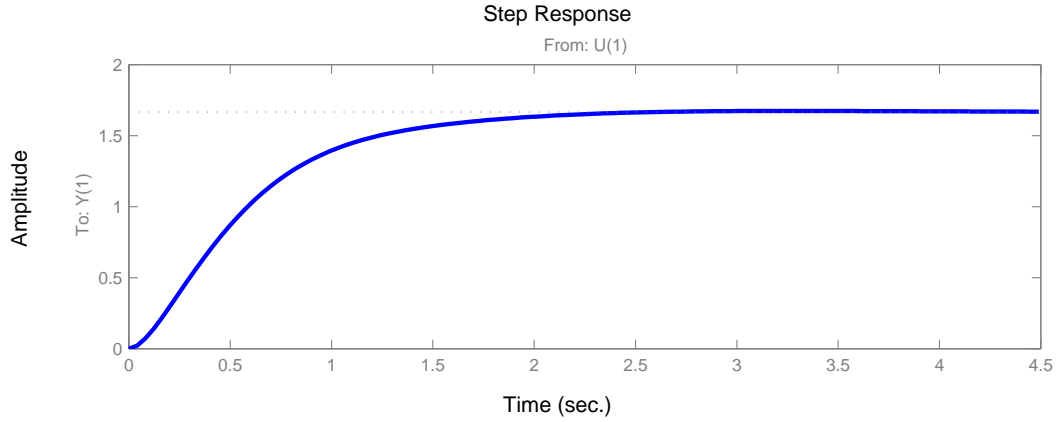


Figura 4.1. Respuesta a escalón de referencia

Y el controlador

$$C(s) = \frac{30(s^2 + 4s + 5)}{(s + 10)(s + 15)} \quad (4.2.2)$$

Este se diseñó utilizando la herramienta gráfica **rltool** de MATLAB. Con esta se eligió la ubicación de sus polos y ceros, para después elegir la ganancia. En la Figura 4.1 se muestra la respuesta del sistema de control a un escalón en la referencia, donde se puede apreciar que el error en estado estacionario es diferente de cero, lo cual era esperable pues el controlador no posee integración. Los polos de lazo cerrado son:

$$p_1 = -12,6466 \quad p_{3,4} = -2,4532 \pm j2,5877 \quad (4.2.3)$$

$$p_2 = -10,7663 \quad p_{5,6} = -1,3404 \pm j0,7369 \quad (4.2.4)$$

La planta (4.2.1) se expresa la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 18 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 14 \\ 45 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.2.5)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t) \quad (4.2.6)$$

Dado que el controlador es de orden $n_c = 2$, y el que resulta de realimentar la planta con un observador de orden reducido sería de orden $n - m = 4 - 1 = 3$, es necesario elegir un polinomio estable de grado 1 que se supone cancelado en el controlador. Por ejemplo:

$$p_a(s) = s + 5 \quad (4.2.7)$$

Esta cancelación en el controlador da origen a un polo adicional en el lazo cerrado. Al observador, que determina $n - m = 4 - 1 = 3$ polos de lazo cerrado, se le asigna este polo y los dos más rápidos de los antes determinados, p_1 y p_2 . Se resuelve la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{J}\mathbf{A}_{12}) = (s + 5)(s + 12,6466)(s + 10,7663) \quad (4.2.8)$$

donde se obtiene:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 28,4129 \\ 253,2216 \\ 680,7854 \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

En tanto que, la ganancia de realimentación determina los $n = 4$ polos de lazo cerrado restantes p_3, p_4, p_5 y p_6 . Se resuelve la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = (s + 2,4532 + j2,5877)(s + 2,4532 - j2,5877) \quad (4.2.10)$$

donde se obtiene:

$$\mathbf{K} = [1,1252 \quad -0,6363 \quad 0,3215 \quad -0,0506] \quad (4.2.11)$$

Con estas constantes se obtiene el controlador equivalente, usando la ecuación (2.2.14):

$$C_{eq}(s) = \frac{30,0009(s + 5)(s^2 + 4s + 5)}{(s + 5)(s + 10)(s + 15)} \quad (4.2.12)$$

donde se hace evidente la cancelación, y una pequeña diferencia en la ganancia respecto a la ecuación (4.2.2), debida a errores de precisión numérica.

El prefiltro que se debe usar es el que se define en la ecuación (2.2.19):

$$F_r(s) = \frac{30,0009(s + 5)(s^2 + 4s + 5)}{(s + 5)(s + 12,65)(s + 10,77)} \quad (4.2.13)$$

Interesa conocer ahora cuál es el efecto de cambiar la asignación de los polos de lazo cerrado. Supongamos que para obtener la ganancia del observador se utilizan los polos más lentos del sistema en lazo cerrado. En este ejemplo en particular, los cuatro polos más lentos están dados en pares complejos conjugados, por lo cual, **no** es posible considerar solo los tres más rápidos pues la ganancia \mathbf{J} resultante sería compleja. Se le asignan los dos polos más lentos y el polo estable adicional $s = -5$. La ecuación a resolver en este caso sería:

$$\det(s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{J}\mathbf{A}_{12}) = (s + 5) \underbrace{(s + 1,340 + j0,737)(s + 1,340 - j0,737)}_{(s^2 + 2,681s + 2,34)} \quad (4.2.14)$$

donde se obtiene:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 7,6808 \\ 15,7435 \\ 11,6977 \end{bmatrix} \quad (4.2.15)$$

En tanto que la ganancia de realimentación determina los restantes $n = 4$ polos de lazo cerrado. Estos son los polos más rápidos del lazo cerrado p_1, p_2, p_3 y p_4 . Se resuelve la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = (s + 12,6466)(s + 10,7663) \quad (4.2.16)$$

$$(s + 2,4532 + j2,5877)(s + 2,4532 - j2,5877)$$

donde se obtiene:

$$\mathbf{K} = [50,0138 \quad -12,0533 \quad 5,2569 \quad -0,8717] \quad (4.2.17)$$

El controlador equivalente, usando la ecuación (2.2.14), es:

$$C_{eq}(s) = \frac{30,0009(s + 5)(s^2 + 4s + 5)}{(s + 5)(s + 10)(s + 15)} \quad (4.2.18)$$

donde se hace evidente la cancelación, y una pequeña diferencia en la ganancia respecto a la ecuación (4.2.2).

El prefiltro que se debe usar, dado por la ecuación (2.2.19), es:

$$F_r(s) = \frac{30,0009(s + 5)(s^2 + 4s + 5)}{(s + 5)(s^2 + 2,681s + 2,34)} \quad (4.2.19)$$

Es decir, no hay efecto sobre el controlador equivalente, pero evidentemente lo habrá en la velocidad de estimación de los estados de la planta.

Controladores de estructura PI p PID

El procedimiento general que se ha descrito para que, a partir del controlador dado en el lazo tradicional, se obtenga el esquema de realimentación del estado observado equivalente, se aplica de igual forma en el caso en que el controlador tiene integración, por ejemplo, si es un **controlador PI o PID**. Es decir, no es necesario hacer consideraciones adicionales a las ya mencionadas. Un controlador PI o de otra estructura, que estabiliza el lazo de control, fija los polos de lazo cerrado. Estos polos

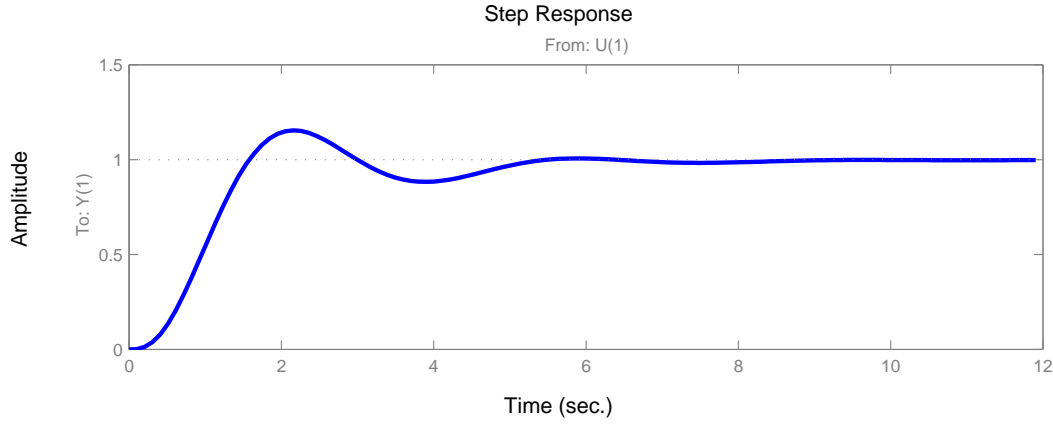


Figura 4.2. Respuesta a escalón de referencia

determinan unívocamente la ganancia del observador \mathbf{J} y la de realimentación \mathbf{K} , que a su vez determinan el controlador equivalente. En la Sección §4.3 se analiza el caso de sistemas multivariable donde dada una planta y los polos de lazo cerrado, existen infinitas de posibles controladores.

A continuación se presenta un ejemplo, en el que aparece un controlador PI, y se desarrolla de manera análoga al anterior.

Ejemplo 7. Controlador PI

Se considera una planta estable cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad (4.2.20)$$

Esta planta se controla mediante el controlador PI:

$$C(s) = 2 \left(1 + \frac{1}{2s} \right) = \frac{2(s + 0,5)}{s} \quad (4.2.21)$$

*Éste fue diseñado utilizando la herramienta gráfica **rltool** de MATLAB. En la Figura 4.2 se muestra la respuesta del sistema de control a un escalón unitario en la referencia, donde se aprecia que el error estacionario es cero. Los polos de lazo cerrado son:*

$$p_1 = -4,3495 \quad (4.2.22)$$

$$p_{2,3} = -0,6167 \pm j1,7107 \quad (4.2.23)$$

$$p_4 = -0,4172 \quad (4.2.24)$$

La planta se expresa en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.2.25)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}(t) \quad (4.2.26)$$

El controlador PI dado es de orden 1, y el que resulta de realimentar la planta con un observador de orden reducido sería de orden $n - m = 3 - 1 = 2$, es necesario elegir un polinomio estable de grado 1 que se supone cancelado en el controlador. Nuevamente se elige:

$$p_a(s) = s + 5 \quad (4.2.27)$$

Esta cancelación en el controlador da origen a un polo más de lazo cerrado.

El observador determina $n - m = 3 - 1 = 2$ polos de lazo cerrado, y a él se le asigna el polo agregado y el polo p_1 , que es el más rápido de los polos de lazo cerrado antes determinados. Se resuelve la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{J}\mathbf{A}_{12}) = (s + 5)(s + 4,3495) \quad (4.2.28)$$

donde se obtiene:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 9,3495 \\ 21,7475 \end{bmatrix} \quad (4.2.29)$$

En tanto, la ganancia de realimentación determina los restantes $n = 3$ polos de lazo cerrado p_2 , p_3 y p_4 . Se resuelve la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = (s + 0,6167 + j1,7107)(s + 0,6167 - j1,7107)(s + 0,4172) \quad (4.2.30)$$

donde se obtiene:

$$\mathbf{K} = [-11,7140 \quad 3,1530 \quad -0,7249] \quad (4.2.31)$$

Con estas matrices se obtiene el controlador equivalente, usando la ecuación (2.2.14):

$$C_{eq}(s) = \frac{1,9999(s + 5)(s + 0,5)}{(s + 5)(s + 0,0001145)} \quad (4.2.32)$$

donde se hace evidente la cancelación, y una pequeña diferencia en la ganancia y en la posición del polo en el origen respecto al controlador dado en (4.2.2), debido a imprecisiones numéricas.

El prefiltro de la referencia que se debe usar en el lazo de realimentación del estado observado, dado por la ecuación (2.2.19) es:

$$F_r(s) = \frac{1,9999(s+5)(s+0,5)}{(s+5)(s+4,349)} \quad (4.2.33)$$

Controlador con integración

Comúnmente el controlador bipropio en un lazo de control, además de diseñarse para hacer estable el lazo cerrado, se elige con integración de manera que asegure error estacionario cero cuando la referencia y las perturbaciones son constantes.

Para interpretar este controlador bipropio en términos de una realimentación con un observador de orden reducido, debemos prestar atención al orden de los sistemas involucrados, como se detalló en el procedimiento descrito al comienzo de esta sección.

Si el orden del controlador es $n_c \leq n - m$, entonces no hay problema en establecer la equivalencia entre los esquemas de control, pues de ser necesario se suponen cancelaciones en el controlador para aumentar su orden, y a partir de los $2n - m$ polos de lazo cerrado y el modelo de la planta, se calculan las matrices de ganancia \mathbf{J} del observador y de realimentación \mathbf{K} .

Si el orden del controlador es mayor, y tiene integración, el o los polos en el origen pueden interpretarse como una perturbación constante en la entrada de la planta, que se incluye en el modelo de ésta, se estima y se compensa. También se podría considerar el esquema alternativo, en que se agrega integración en un lazo exterior. Se ilustra la primera estrategia, mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8. Un caso en que $n_c > n - m$.

Se considera una planta estable de orden $n = 2$ cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 13} \quad (4.2.34)$$

que se controla mediante un controlador con integración, bipropio y de orden $n_c = 2$, que podría interpretarse como un control PID:

$$C(s) = \frac{65}{2} \left(1 + \frac{1}{\frac{13}{30}s} + \frac{\frac{7}{130}s}{\frac{1}{10}s + 1} \right) = \frac{50(s+3)(s+5)}{s(s+10)} \quad (4.2.35)$$

Este se diseñó utilizando la herramienta gráfica **rltool** de MATLAB. En la Figura 4.3 se muestra la respuesta del lazo de control a un escalón unitario en la referencia en que se observa error cero en estado estacionario. Los polos de lazo cerrado son:

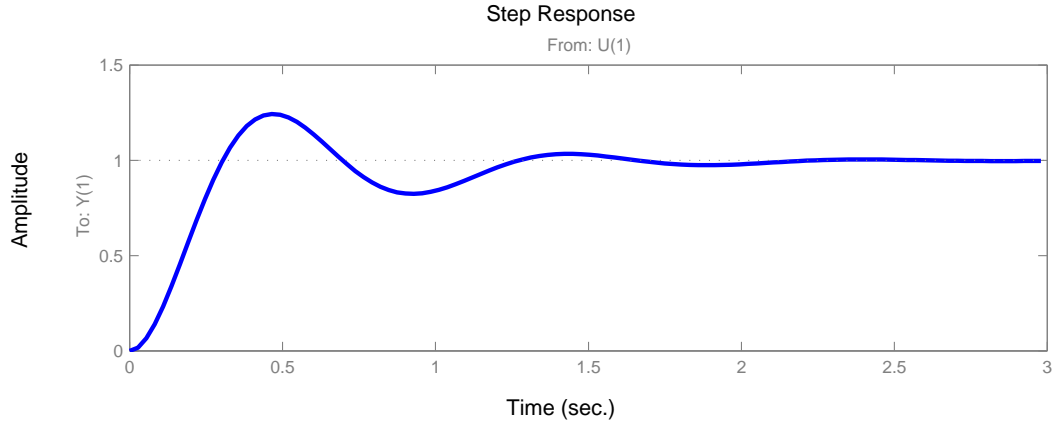


Figura 4.3. Respuesta a escalón del sistema de control

$$p_1 = -7,9360 \quad (4.2.36)$$

$$p_2 = -2,0237 \quad (4.2.37)$$

$$p_{3,4} = -2,0202 \pm j6,5283 \quad (4.2.38)$$

La planta se expresa en la forma (2.1.6)-(2.1.7):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -13 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.2.39)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (4.2.40)$$

El controlador dado es de orden $n_c = 2$, que es mayor que $n - m = 2 - 1 = 1$, por tanto no puede interpretarse directamente como una realimentación del estado observado de la planta. Es necesario ampliar el modelo nominal de la planta, incluyendo en él el modelo de una perturbación de entrada constante, como se detalló en la sección §3.1. El modelo de la perturbación de entrada constante es:

$$\dot{\mathbf{x}}_d(t) = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_d(t) \quad (4.2.41)$$

$$d(t) = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_d(t) \quad (4.2.42)$$

con lo que el modelo ampliado de la planta, usando las ecuaciones (3.1.8)-(3.1.9), resulta:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.2.43)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}(t) \quad (4.2.44)$$

Es decir, se logra ampliar el orden de la planta a $n^* = n + n_d = 2 + 1 = 3$.

Los polos de lazo cerrado se utilizan como antes para obtener las matrices de ganancia. Al observador se le asignan los polos de lazo cerrado complejos conjugados, resolviendo la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{J}\mathbf{A}_{12}) = \underbrace{(s + 2,0202 + j6,5283)(s + 2,0202 - j6,5283)}_{(s^2 + 4,04s + 46,70)} \quad (4.2.45)$$

donde se obtiene:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4,0404 \\ 46,6999 \end{bmatrix} \quad (4.2.46)$$

Si se observa la ecuación (3.1.33) en la página 46, la parte de la ganancia de realimentación que fija los dos polos de lazo cerrado restantes se obtiene con las matrices de estado del modelo nominal de la planta, y no el modelo ampliado. Se resuelve la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_o + \mathbf{B}_o\mathbf{K}_o) = (s + 7,9360)(s + 2,0237) \quad (4.2.47)$$

donde se obtiene:

$$\mathbf{K}_o = [-20,7787 \quad 5,9597] \quad (4.2.48)$$

y la matriz de ganancia completa de la realimentación resulta ser:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_o \quad \mathbf{C}_d] \quad (4.2.49)$$

$$= [-20,7787 \quad 5,9597 \quad 1] \quad (4.2.50)$$

Con estas constantes se obtiene el controlador equivalente, usando la ecuación (2.2.14):

$$C_{eq}(s) = \frac{50,0008(s + 5)(s + 3)}{s(s + 10)} \quad (4.2.51)$$

que es el controlador dado, excepto una pequeña diferencia en la ganancia, debida a limitaciones en la precisión de cálculo.

El prefiltro para la referencia que se debe usar en el lazo de realimentación del estado observado, es el definido en (2.2.19). Esto es

$$F_r(s) = \frac{50,0008(s+3)(s+5)}{(s^2 + 4,04s + 46,70)} \quad (4.2.52)$$

La metodología presentada en el ejemplo anterior puede extenderse para cualquier caso en que el orden del controlador dado sea mayor que el que corresponde al controlador equivalente de un lazo de realimentación del estado, es decir, cuando $n_c > n - m$. Para ilustrar esto, en el ejemplo siguiente se ha tomado un controlador artificialmente complejo que fuerza a ampliar el modelo de la planta para poder explicar la presencia de los polos adicionales.

Ejemplo 9. Caso más general en que $n_c > n - m$.

Se considera un sistema de control en que la planta es la misma considerada en ejemplos anteriores:

$$G(s) = \frac{6(s-1)}{(s+3)(s-2)} \quad (4.2.53)$$

que se estabiliza con el controlador:

$$C(s) = \frac{(s+3)(3s^2 + 25s - 2)}{3s(s^2 + s - 32)} = \frac{(s+8,4126)(s+3)(s-0,07925)}{s(s+6,1789)(s-5,1789)} \quad (4.2.54)$$

Éste se diseñó asignando los polos del polinomio característico de lazo cerrado en:

$$p_{1,2} = -1 \pm j \quad ; \quad p_3 = -1 \quad ; \quad p_4 = -2 \quad ; \quad p_5 = -3 \quad (4.2.55)$$

En la Figura 4.4 se muestra la respuesta del sistema de control a un escalón en la referencia, donde se puede apreciar que el error en estado estacionario es igual a cero.

La planta (4.2.1) se expresa la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.2.56)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (4.2.57)$$

Dado que el controlador dado es de orden $n_c = 3$, y el que resulta de realimentar la planta con un observador de orden reducido sería de orden $n - m = 1$, es necesario aumentar el orden de la planta. En el Ejemplo 5, con el objeto de obtener integración, se supuso una perturbación de entrada constante, dando origen a un controlador equivalente bipropio y con integración, de orden 2. En este ejemplo, interesa obtener el esquema de realimentación del estado observado que tiene como equivalente al

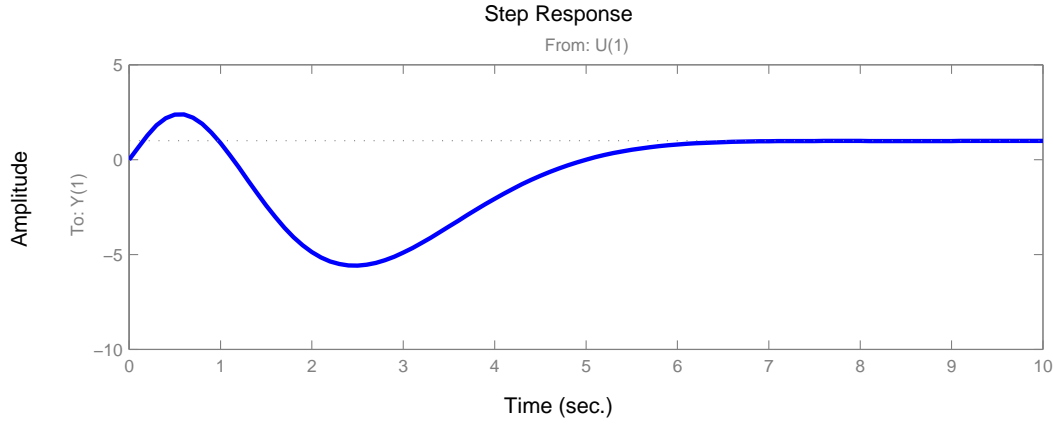


Figura 4.4. Respuesta a escalón de referencia

controlador (4.2.54), para lo cual se elige un modelo de perturbación de entrada que tenga además del polo en el origen, para tener una constante como modo natural, tenga un polo en $s = -6,1789$ o en $s = 5,1789$, que son los otros polos del controlador dado. Este polo agregado pasa a ser polo de lazo cerrado, por lo cual es conveniente que sea estable, sin embargo, si se considera que se trata sólo de una manipulación algebraica que permite obtener el controlador (4.2.54) la elección resulta irrelevante. Si se considera entonces, una perturbación de entrada en que aparece una constante y un modo del tipo $e^{-6,1789 \cdot t}$, su modelo en variables de estado será:

$$\dot{\mathbf{x}}_d(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6,1789 \end{bmatrix} \mathbf{x}_d(t) \quad (4.2.58)$$

$$d(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_d(t) \quad (4.2.59)$$

donde las matrices son:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.60)$$

El modelo ampliado de la planta, usando las ecuaciones (3.1.8)-(3.1.9), resulta:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 6 & 6 \\ 6 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.2.61)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (4.2.62)$$

con lo cual se logra ampliar el orden de la planta a $n^* = n + n_d = 2 + 2 = 4$.

Los polos de lazo cerrado serán los mismos anteriores a los que se agrega $p_6 = 0$ Y $p_7 = 0$, que **son no controlables**.

Al observador, que determina $n^* - m = 4 - 1 = 3$ polos de lazo cerrado, se le asignan los tres más rápidos de los antes determinados, p_3 , p_4 y p_5 . Se resuelve la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{J}\mathbf{A}_{12}) = (s+1)(s+2)(s+3) \quad (4.2.63)$$

donde se obtiene:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2,3431 \\ -0,1618 \\ -0,2585 \end{bmatrix} \quad (4.2.64)$$

En tanto que, la realimentación determina los $n = 4$ polos de lazo cerrado restantes p_1 , p_2 , p_6 y p_7 . Los dos últimos no son controlables, por tanto, no pueden ser desplazado arbitrariamente en el plano complejo al elegir la ganancia \mathbf{K} , sino que ésta se particiona según la ecuación (3.1.33), y se resuelve la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_o + \mathbf{B}_o\mathbf{K}_o) = (s+1+j)(s+1-j) \quad (4.2.65)$$

en que \mathbf{A}_o y \mathbf{B}_o son las matrices del modelo original de la planta de orden 2. De esta forma se obtiene:

$$\mathbf{K}_o = [0,5417 \quad 0,3750] \quad (4.2.66)$$

Por tanto, la matriz de realimentación completa es:

$$\mathbf{K} = [0,5417 \quad 0,3750 \quad 1 \quad 1] \quad (4.2.67)$$

Con estas constantes se obtiene el controlador equivalente, usando la ecuación (2.2.14):

$$C_{eq}(s) = \frac{(s+8,944)(s+3)(s-0,07925)}{s(s+6,179)(s-5,179)} \quad (4.2.68)$$

donde, tomando en cuenta la precisión numérica, se aprecia que es el mismo controlador dado por la ecuación (4.2.2).

El prefiltro que se debe usar es el que se define en la ecuación (2.2.19):

$$F_r(s) = \frac{(s+8,413)(s+3)(s-0,07925)}{(s+2)(s+3)(s+1)} \quad (4.2.69)$$

Controladores propios

Se ha destacadado repetidamente en esta tesis que el interés principal por estudiar el observador de orden reducido es la equivalencia que permite establecer entre

controladores bipropios con esquemas de realimentación del estado. Sin embargo, la equivalencia no se limita a este tipo de controladores sino que puede extenderse a cualquier controlador con grado relativo mayor o igual a uno, siguiendo exactamente el mismo procedimiento antes descrito. Esto significa que a partir de la expresión de la planta en su forma canónica observable y calculando los polos de lazo cerrado de control clásico, para el caso SISO, quedan únicamente determinadas las matrices de ganancia \mathbf{J} y \mathbf{K} del observador y de la realimentación del estado, respectivamente.

Esto se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10. *Se considera una planta estable de orden $n = 3$ cuya función de transferencia está dada por:*

$$G(s) = \frac{5s + 1}{(s + 1)^3} \quad (4.2.70)$$

la cual es controlada mediante un **controlador estrictamente propio**, con integración y de orden $n_c = 2$:

$$C(s) = \frac{1}{s(s + 3)} \quad (4.2.71)$$

La existencia o no de ceros en un controlador no tiene influencia sobre sus polos, por tanto, este ejemplo se desarrolla siguiendo la misma metodología descrita. En este caso el orden del controlador dado coincide con el del controlador equivalente ($n_c = n - m$), y no es necesario suponer cancelaciones en el controlador ni ampliar el orden de la planta incorporando perturbaciones.

El controlador (4.2.71) se diseñó utilizando **rltool** de MATLAB, y en la Figura 4.5 se muestra la respuesta del lazo de control a un escalón en la señal de referencia en que se observa el efecto de la integración que hace cero el error en estado estacionario. Los polos de lazo cerrado son:

$$p_1 = -0,1478 \quad (4.2.72)$$

$$p_{2,3} = -0,2357 \pm j0,9058 \quad (4.2.73)$$

$$p_{4,5} = -2,6904 \pm j0,6958 \quad (4.2.74)$$

La planta se expresa en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.2.75)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (4.2.76)$$

Como se mencionó, el controlador dado es de orden $n_c = 2 = n - m$, por tanto puede interpretarse directamente como equivalente a un esquema de realimentación

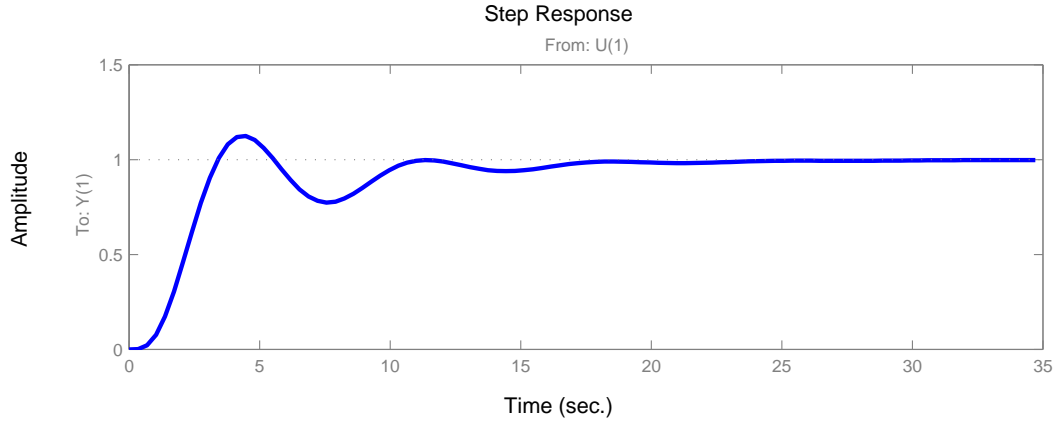


Figura 4.5. Respuesta a escalón del sistema de control

del estado observado de la planta, sin ampliar su modelo para incluir perturbaciones o suponiendo cancelaciones de polos con ceros.

Los polos de lazo cerrado se utilizan como antes para obtener las matrices de ganancia. La del observador se obtiene asignándole los polos de lazo cerrado más rápidos, es decir, se resuelve la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{J}\mathbf{A}_{12}) = \underbrace{(s + 2,6904 + j0,6958)(s + 2,6904 - j0,6958)}_{(s^2 + 5,381s + 7,723)} \quad (4.2.77)$$

donde se obtiene:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 5,3808 \\ 7,7225 \end{bmatrix} \quad (4.2.78)$$

Análogamente, para la ganancia de realimentación se resuelve la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = (s + 0,1478) \underbrace{(s + 0,2357 + j0,9058)(s + 0,2357 - j0,9058)}_{(s^2 + 0,4714s + 0,876)} \quad (4.2.79)$$

donde se obtiene:

$$\mathbf{K} = [1,1215 \quad -0,5195 \quad 0,2168] \quad (4.2.80)$$

Con estas constantes se obtiene el controlador equivalente, usando la ecuación (2.2.14):

$$C_{eq}(s) = \frac{4,079 \cdot 10^{-5}s^2 + 8,041 \cdot 10^{-5}s + 1}{s^2 + 3s - 0,00018264} \quad (4.2.81)$$

El controlador obtenido corresponde al dado originalmente si, considerando las imprecisiones numéricas, se desprecian los dos primeros coeficientes en el numerador y el último del denominador. Para el prefiltro de la referencia, definido por la ecuación (2.2.19), debe hacerse una consideración similar:

$$F_r(s) = \frac{4,079 \cdot 10^{-5}s^2 + 8,041 \cdot 10^{-5}s + 1}{s^2 + 5,381s + 7,723} \quad (4.2.82)$$

4.3. Caso general para sistemas multivariables (MIMO)

En esta sección se analiza la interpretación de un lazo de control clásico multivariable, en términos de un lazo de realimentación del estado estimado a través de un observador de orden reducido.

En primer lugar, se podría intentar establecer la equivalencia entre ambos esquemas de control utilizando el mismo procedimiento antes desarrollado para sistemas escalares. Este se puede estructurar en los siguientes pasos:

- Dada la matriz de transferencia de la planta es necesario obtener su representación en variables de estado.
- Si es necesario, se debe aplicar una transformación de estado para obtener la forma conveniente en la matriz \mathbf{C} que permite simplificar las expresiones

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I}_m \quad 0] \quad (4.3.1)$$

en que m es la dimensión de la entrada y de la salida del sistema multivariable.

- Dada la planta, de orden n , y el controlador, de orden n_c , se determinan los $n + n_c$ polos de lazo cerrado del sistema de control.
- Se deben tener $2n - m$ polos de lazo cerrado, así que si en el punto anterior $n_c < n - m$, como sucederá usualmente, se pueden suponer cancelaciones entre polos y ceros del controlador. Estos polos cancelados son polos de lazo cerrado.
- Se usa la ecuación (2.2.2) para obtener las ganancias del observador \mathbf{J} y de realimentación \mathbf{K} al asignar polos de lazo cerrado a cada uno de los términos en el Lema 14, en la página 29, que establece el Principio de Separación. A la ganancia \mathbf{J} le corresponden $n - m$ polos, y n a la ganancia \mathbf{K} .
- Se puede verificar la equivalencia del lazo de control por realimentación del estado con el esquema de control clásico, obteniendo el controlador equivalente definido en la ecuación (2.2.14).

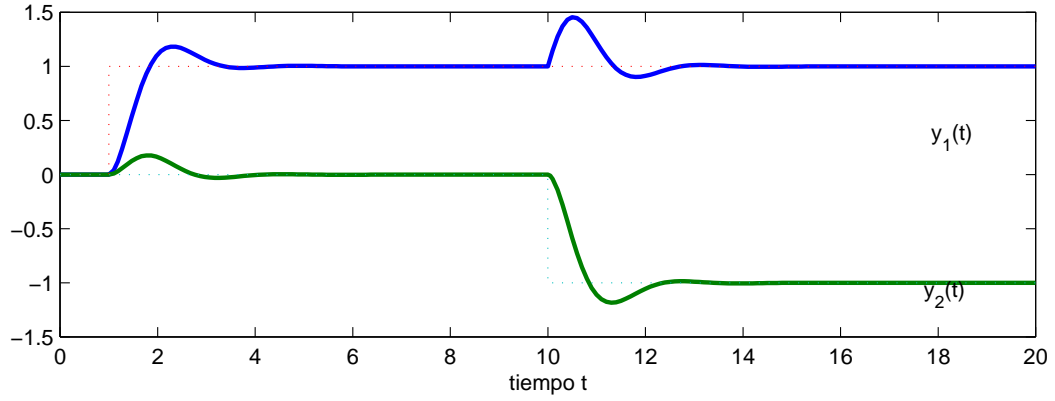


Figura 4.6. Respuesta a escalones del sistema de control.

Se presenta el siguiente ejemplo, de manera de ilustrar lo que sucede al aplicar la metodología propuesta a un sistema *MIMO*:

Ejemplo 11. *Se considera un sistema de control en que la planta está definida por la matriz de transferencia:*

$$\mathbf{G}_o(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+1)(s+2)} & \frac{-1}{s+1} \\ \frac{0,5}{(s+1)^2} & \frac{1}{6(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

Esta es controlada mediante el controlador:

$$\mathbf{C}(s) = \begin{bmatrix} \frac{4,5(s+1)(s+2)}{s(s+4)} & 0 \\ 0 & \frac{1,5(s+2)(s+3)}{s(s+4)} \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

que logra estabilizar la planta (4.3.2), como se aprecia en la Figura 4.6 en que se muestran las salidas del sistema de control cuando se aplica un escalón en cada una de los canales de la referencia.

En primer lugar, se busca una representación en variables de estado para la planta. Con ayuda de MATLAB se obtiene:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (4.3.4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (4.3.5)$$

Sin embargo, al aplicar la función **minreal**, que elimina de la representación los estados no controlables u observables, se observa que se elimina un estado de la representación, obteniéndose:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1,2 & -1,5 & 1,5 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ 0,27 & -2,05 & 1,05 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ 0,38 & -0,27 & -0,72 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & -1 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & -5 & -1,5 \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & 4 & \epsilon \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0,3 & \epsilon \\ 1,3 & \epsilon \\ -0,3 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \\ \epsilon & 1 \\ \epsilon & \epsilon \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (4.3.6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -0,83 & 0,16 & -0,16 & -1 & \epsilon & \epsilon \\ -0,083 & -0,083 & -0,416 & \epsilon & \epsilon & 1,5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (4.3.7)$$

donde las celdas en que aparece ϵ corresponden a números del orden o menores que 10^{-14} . En adelante, se considera $\epsilon \rightarrow 0$.

Para llevar la matriz \mathbf{C} de la planta a la forma (4.3.1), se elige una matriz \mathbf{C}' de manera que:

$$\det \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \right) \neq 0 \quad (4.3.8)$$

Pues, de esta forma:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{C}'\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (4.3.9)$$

Es decir, si se hace una transformación del estado $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(t)$, en que $\mathbf{T} = \mathbf{M}^{-1}$, entonces la matrices de la nueva representación de estado son:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}^{-1} \quad (4.3.10)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \quad (4.3.11)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^{-1} = [\mathbf{I}_m \quad 0] \quad (4.3.12)$$

Para el ejemplo, se elige la matriz $\mathbf{C}' = [0, \mathbf{I}_4]$.

Con lo que la matriz \mathbf{M} , resulta:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8\bar{3} & 0,1\bar{6} & -0,1\bar{6} & -1 & 0 & 0 \\ -0,08\bar{3} & -0,08\bar{3} & -0,41\bar{6} & 0 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

Aplicando esta transformación del estado, la nueva realización que se obtiene es:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -12 & -6 & 1 & 0 & 18 \\ 0,5 & -4 & -1,5 & 0,5 & 6 & 6 \\ -0,6 & 2 & 0 & -0,6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -0,3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (4.3.14)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (4.3.15)$$

Esta corresponde a la forma (2.1.6)-(2.1.7) deseada para simplificar todos los desarrollos matriciales posteriores.

Por su parte, el controlador puede representarse en variables de estado como:

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}(t) \quad (4.3.16)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} -2,25 & 2,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 2,25 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} 4,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix} \mathbf{e}(t) \quad (4.3.17)$$

Una representación en variables de estado del sistema en lazo cerrado puede obtenerse utilizando la Propiedad 11 en el Apéndice B. Ésta entrega la representación de estado de un lazo de control, cuando se conoce la representación de estado de la

planta (estrictamente propia) y el controlador (usualmente bipropio). En particular, para obtener los **polos de lazo cerrado** del sistema de control, interesa obtener la matriz principal y sus autovalores:

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}}\mathbf{D}_c\overline{\mathbf{C}} & \overline{\mathbf{B}}\mathbf{C}_c \\ -\mathbf{B}_c\overline{\mathbf{C}} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \quad (4.3.18)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -10,5 & -6 & 1 & 0 & 18 & 0 & 0 & -0,75 & -2,25 \\ 0,5 & -4 & -1,5 & 0,5 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8\overline{3} & 2 & 0 & -0,6 & 0 & -3 & 0,75 & -0,75 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 2,25 \\ 0 & -1,5 & 0 & 0 & -5 & -1,5 & 0 & 0 & 0,75 & 2,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.19)$$

Los autovalores de esta matriz, que son los polos de lazo cerrado del sistema de control son:

$$p_{1,2} = -2,5110 \pm j2,1445 \quad (4.3.20)$$

$$p_{3,4} = -1,3236 \pm j2,3820 \quad (4.3.21)$$

$$p_{5,6} = -1,1654 \pm j0,3773 \quad (4.3.22)$$

$$p_7 = -1,0000 \quad (4.3.23)$$

$$p_8 = -2,0000 \quad (4.3.24)$$

$$p_9 = -3,0000 \quad (4.3.25)$$

$$p_{10} = -2,0000 \quad (4.3.26)$$

En este ejemplo, el orden de la planta es $n = 6$ con $m = 2$ entradas y salidas, por tanto el controlador equivalente a un esquema de realimentación del estado observado a través de un observador de Luenberger es $n - m = 4$, que coincide con el controlador dado en este caso, es decir, $n - m = n_c$ y no es necesario suponer cancelaciones de polos con ceros en el controlador.

Para calcular las ganancias \mathbf{J} y \mathbf{K} del esquema de realimentación del estado, se asignan los polos de lazo cerrado.

Los polos más rápidos serán atribuidos al observador, como en ocasiones anteriores, resolviendo la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{J}\mathbf{A}_{12}) = (s - p_{10})(s - p_1)(s - p_2)(s - p_9) \quad (4.3.27)$$

en que las matrices \mathbf{A}_{12} y \mathbf{A}_{22} se originan en la partición de la matriz \mathbf{A} , según la ecuación (2.1.15), es decir, la ecuación a resolver es:

$$\det \left(s\mathbf{I}_4 - \begin{bmatrix} 0 & -0.6 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \\ j_{31} & j_{32} \\ j_{41} & j_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 & 18 \\ -1.5 & 0.5 & 6 & 6 \end{bmatrix} \right) \\ = (s+2)(s+2,5110+j2,1445)(s+2,5110-j2,1445)(s+3) \quad (4.3.28)$$

Usando el comando **place** de MATLAB, se obtiene:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1,0695 & 2,7134 \\ -4,4340 & 13,7643 \\ 0,1197 & -0,6047 \\ -0,1098 & 0,8053 \end{bmatrix} \quad (4.3.29)$$

Para la ganancia \mathbf{K} se procede de manera análoga, si bien esta matriz de ganancia determina $n = 6$ polos. La ecuación a resolver es:

$$\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = (s-p_7)(s-p_5)(s-p_6)(s-p_3)(s-p_4)(s-p_8) \quad (4.3.30)$$

Finalmente, también usando MATLAB, se obtiene:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0,2407 & -1,2560 & -0,8253 & 0,4107 & 1,6174 & 2,4423 \\ -1,0337 & 7,1770 & 3,5036 & -0,9605 & -2,3703 & -10,9747 \end{bmatrix} \quad (4.3.31)$$

Con estas ganancias determinadas se puede obtener el controlador equivalente definido en la ecuación (2.2.14). Su representación en variables de estado, está dada por las expresiones:

$$\mathbf{A}_c = [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_4] (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \quad (4.3.32)$$

$$\mathbf{B}_c = [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_4] (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (4.3.33)$$

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \quad (4.3.34)$$

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (4.3.35)$$

Si se desarrolla la matriz \mathbf{A}_c , se puede apreciar que este controlador equivalente obtenido **no es el mismo** que el dado en el lazo cerrado original, pues, por ejemplo, no tiene los mismos polos:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 1,1251 & -1,8442 & -18,2763 & -10,9528 \\ 6,0738 & -6,7465 & -90,7258 & -40,4610 \\ -4,1119 & 1,2581 & 1,2825 & 12,2623 \\ 0,9339 & -0,3983 & -1,0924 & -4,0606 \end{bmatrix} \quad (4.3.36)$$

Sus autovalores son $\{-2,3173 \pm 5,8817j, -2,5421, -1,2228\}$, mientras que los polos del controlador original son $\{0, 4, 0, 4\}$.

Para confirmar esta diferencia se calcula la expresión en matriz de transferencia del controlador equivalente. Esta es:

$$\mathbf{C}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0,772(s+1,916)(s+1,285)(s^2+4,97s+23,83)}{(s+2,542)(s+1,223)(s^2+4,635s+39,96)} & \frac{0,3995(s+5,692)(s+1,965)(s+1,603)(s-1,005)}{(s+2,542)(s+1,223)(s^2+4,635s+39,96)} \\ \frac{3,146(s+3,047)(s+1,389)(s^2+4,707s+7,42)}{(s+2,542)(s+1,223)(s^2+4,635s+39,96)} & \frac{-3,942(s+0,6837)(s+1,947)(s+2,736)(s+3,476)}{(s+2,542)(s+1,223)(s^2+4,635s+39,96)} \end{bmatrix} \quad (4.3.37)$$

En la Figura 4.7 se muestra la respuesta del lazo de control en que se usa este controlador a las mismas señales en las referencias que se usaron en la simulación cuyos resultados se muestran en la Figura 4.6.

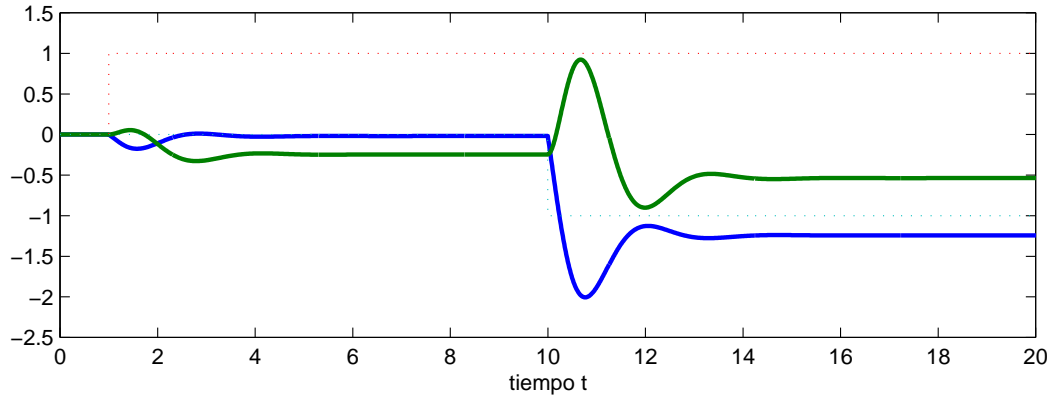


Figura 4.7. Respuesta a escalones de referencia del lazo resultante

Se puede apreciar que las señales obtenidas en la salida del sistema difieren de las anteriores, y los errores en estado estacionarios son diferentes de cero, lo cual era esperable pues el controlador equivalente obtenido no tiene integración.

A pesar que el ejemplo anterior pone de manifiesto que la metodología planteada para sistemas escalares no es adecuada para *MIMO*, si se comparan las salidas de la planta en la Figura 4.7 con las de la Figura 4.6, se aprecia que **se mantienen**

las características de la respuesta, en cuanto a velocidad y frecuencia de oscilación. Esto se debe evidentemente a que la condición para obtener el controlador equivalente se impuso sobre los polos de lazo cerrado del sistema, que determinan los modos naturales presentes en estas señales. Esto también sugiere que el controlador obtenido cumple con las exigencias especificadas, pero no son suficientes para obtener el mismo dado en el lazo cerrado original, pues existen grados de libertad como se analiza a continuación.

Análisis

Ante la diferencia entre controlador dado y el obtenido a partir de la realimentación del estado observado, es necesario analizar la forma en que se procedió.

Si se observa la ecuación de asignación de polos de lazo cerrado:

$$\det(s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{J}\mathbf{A}_{12}) \det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = \prod_{i=1}^{2n-m} (s - p_i) \quad (4.3.38)$$

Es fundamental analizar el número de **grados de libertad existentes en la ecuación de polos de lazo cerrado**. Las matrices de ganancia involucradas son:

$$\underbrace{\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}}_{(n-m) \cdot m \text{ coeficientes}} ; \quad \underbrace{\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}}_{m \cdot n \text{ coeficientes}} \quad (4.3.39)$$

Es decir, se tienen en total $(n - m) \cdot m + m \cdot n = (2n - m) \cdot m$ coeficientes matriciales a determinar, mientras que los polos de lazo cerrado representan solo $2n - m$ condiciones. Naturalmente

$$(2n - m)m \geq 2n - m \quad (4.3.40)$$

y la igualdad se produce sólo en el caso **SISO**, es decir, cuando $m = 1$. Esto explica porque este problema no aparece en los ejemplos antes desarrollados.

Si se considera, por ejemplo, la ecuación (4.3.28) se aprecia que los coeficientes de la matriz \mathbf{J} a determinar son 8, mientras que el polinomio del lado derecho impone 4 condiciones. Es decir, la solución para \mathbf{J} es un espacio de dimensión 4, que fija los mismos 4 polos de lazo cerrado. Algo similar sucede en la ecuación (4.3.30), en que existen 6 condiciones, para 12 coeficientes.

Esta **infinidad** de valores posibles para las matrices de ganancia, preservando los mismos polos de lazo cerrado, genera en las ecuaciones (4.3.32)-(4.3.35) una infinidad de posibles controladores.

Es importante destacar que el comando **place** de MATLAB, que se utilizó para encontrar una solución de las ecuaciones (4.3.28) y (4.3.30), utiliza un algoritmo tal que la elección de \mathbf{J} y \mathbf{K} de manera que sea robusta ante errores de modelado. Esto es, cuando existen grados de libertad, tal como sucede en el caso de sistemas

multivariabes, aprovecha estos para elegir los coeficientes de las matrices de manera que la variación en la posición de los polos sea mínima ante cambios en las matrices del modelo de la planta ([9]).

Observaciones

1. Es importante notar que un controlador de orden n_c (grado McMillan n_c) con m entradas y salidas, queda determinado por los $(n_c + m)^2$ coeficientes de su representación en variables de estado. Naturalmente que, si su orden es $n_c = n - m$, definirá n^2 coeficientes. En el caso del controlador dado en el ejemplo anterior, éste define 36 coeficientes.
2. El controlador equivalente depende de las ganancias $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$ y $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, es decir, son $(n - m)m + mn = 2nm - m^2$ coeficientes que representan grados de libertad. En el ejemplo anterior, esto representa 20 coeficientes a determinar para que la equivalencia quede establecida.
3. Dado que se trabaja con modelos en variables de estado, entre el controlador dado y el equivalente que se obtiene la relación que no es de igualdad exacta pues puede existir de por medio una transformación del estado. Ésta es una matriz no singular del mismo orden que el controlador, es decir, con $n_c^2 = (n - m)^2$ coeficientes, si el controlador dado es del mismo orden que el equivalente. En el ejemplo anterior, dicha transformación de similaridad sería una matriz de orden 4, definida por 16 coeficientes.

Es decir, siempre se puede interpretar el controlador dado como el controlador equivalente a un sistema de realimentación del estado observado, pues el primero determina n^2 **condiciones**, suponiendo que es del orden *adecuado*, y para el equivalente existen $2nm - m^2 + (n - m)^2 = n^2$ **grados de libertad**. Estos grados de libertad están dados por las matrices de ganancia \mathbf{J} y \mathbf{K} y por la transformación de similaridad \mathbf{T} , dada las diferentes realizaciones posibles para el controlador.

Para establecer la equivalencia, entonces, se debe resolver el sistema de ecuaciones que se desprende de las siguientes igualdades:

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_{c0} \mathbf{T} = [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (4.3.41)$$

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}_{c0} = [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-m}] (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (4.3.42)$$

$$\mathbf{C}_{c0} \mathbf{T} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (4.3.43)$$

$$\mathbf{D}_{c0} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (4.3.44)$$

en que $\{\mathbf{A}_{c0}, \mathbf{B}_{c0}, \mathbf{C}_{c0}, \mathbf{D}_{c0}\}$ son las matrices de la representación de estado del controlador dado. Es decir, en el caso del ejemplo anterior corresponden a las matrices en las ecuaciones (4.3.16)-(4.3.17).

Este enfoque, a diferencia del caso SISO, da origen a un elevado número de ecuaciones a resolver para establecer explícitamente la equivalencia entre un lazo de control clásico y uno por realimentación del estado observado. Para encontrar las matrices de ganancia \mathbf{J} y \mathbf{K} , y la transformación de estado del controlador \mathbf{T} , deben resolverse simultáneamente las ecuaciones (4.3.41)-(4.3.44), lo que involucra una elevada complejidad computacional. Una manera de reducir el número de cálculos necesario es reescribir dichas ecuaciones en la forma:

$$\mathbf{A}_{c0}\mathbf{T} - \mathbf{T} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.3.45)$$

$$\mathbf{B}_{c0} - \mathbf{T} \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.3.46)$$

$$\mathbf{C}_{c0}\mathbf{T} - \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.3.47)$$

$$\mathbf{D}_{c0} - \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.3.48)$$

Se observa que, de todas formas, el conjunto de ecuaciones a resolver es un sistema no lineal de dimensión n^2 , en que n es el orden de la planta.

Al intentar resolver las ecuaciones (4.3.45)-(4.3.48) para el Ejemplo 11, la complejidad computacional impidió encontrar la explícitamente la solución de las ecuaciones². Por esto, se ilustra la idea mediante un ejemplo simplificado, en el cual la planta y el controlador utilizados son más simples.

Ejemplo 12. *Se considera el sistema de control en que la planta está definida por la matriz de transferencia:*

$$\mathbf{G}_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{10}{s^2 + 4s + 4} & \frac{-0,5}{5s + 1} \\ 0 & \frac{10}{s + 2} \end{bmatrix} \quad (4.3.49)$$

Esta planta es estable y tiene baja interacción en los canales fuera de la diagonal, por tanto puede ser controlada, por ejemplo, mediante un control diagonal, con un PI en cada canal:

$$\mathbf{C}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{s+4}{s} \end{bmatrix} \quad (4.3.50)$$

²Usando el software MAPLE 6

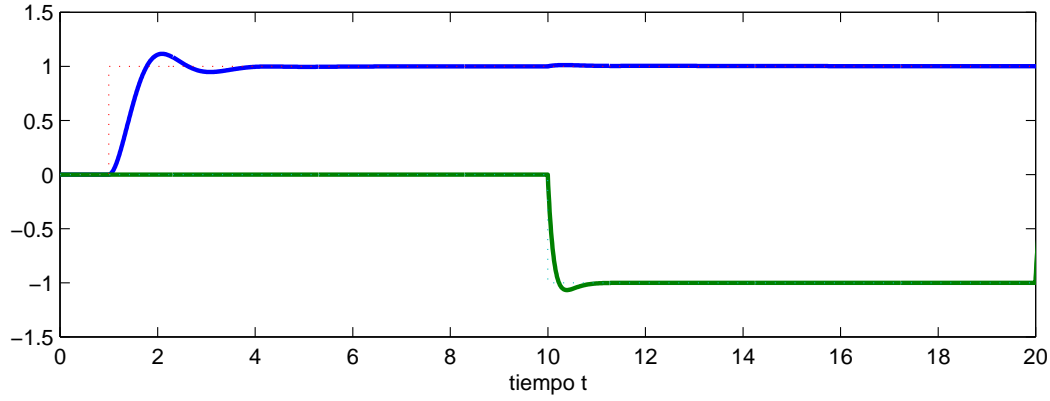


Figura 4.8. Respuesta a escalones del sistema de control.

que logra controlarla con error cero en estado estacionario a referencia constante, como se aprecia en la Figura 4.8. En ella se muestran las salidas del sistema de control cuando se aplica un escalón en cada una de los canales de la referencia con diferente signo.

En primer lugar, se busca una representación en variables de estado para la planta. Con ayuda de MATLAB se obtiene una realización mínima para la planta que es de orden $n = 2$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,25 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (4.3.51)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1,25 & -0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (4.3.52)$$

Para llevar la matriz \mathbf{C} de la planta a la forma (4.3.1), se elige una matriz \mathbf{C}' de manera que:

$$\det \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \right) \neq 0 \quad (4.3.53)$$

Pues, de esta forma si hacemos una transformación del estado $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(t)$, en que $\mathbf{T} = \mathbf{M}^{-1}$, entonces la matrices de la nueva representación de estado son:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}^{-1} \quad (4.3.54)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \quad (4.3.55)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^{-1} = [\mathbf{I}_m \quad 0] \quad (4.3.56)$$

Para este ejemplo, se elige la matriz $\mathbf{C}' = [\mathbf{I}_2, \mathbf{0}]$, con lo que la matriz \mathbf{M} a usar es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1,25 & -0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.57)$$

Aplicando esta transformación del estado, la nueva realización que se obtiene es:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -0,2 & 0 & 5 & 0,25 \\ 0 & -2 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 0 & -0,1 \\ 0 & 10 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (4.3.58)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (4.3.59)$$

que corresponde a la forma deseada para simplificar todos los desarrollos matriciales posteriores.

En tanto, el controlador se puede representar en variables de estado como:

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{e}(t) \quad (4.3.60)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{e}(t) \quad (4.3.61)$$

Se puede obtener una representación en variables de estado del sistema en lazo cerrado utilizando la Propiedad 11 en el Apéndice B. Si bien en este ejemplo no se utilizarán los polos de lazo cerrado como forma de obtener el controlador equivalente, éstos se calculan para comparar posteriormente si se satisfacen las ecuaciones (4.3.28) y (4.3.30). La matriz principal del sistema de control, cuyos autovalores son los polos de lazo cerrado es:

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}}\mathbf{D}_c\overline{\mathbf{C}} & \overline{\mathbf{B}}\mathbf{C}_c \\ -\mathbf{B}_c\overline{\mathbf{C}} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \quad (4.3.62)$$

$$= \begin{bmatrix} -0,2 & 0,1 & 5 & 0,25 & 0 & -0,2 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -2 & 0 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.63)$$

Los autovalores de esta matriz son los polos de lazo cerrado del sistema de control:

$$p_{1,2} = -6,0000 \pm j2,0000 \quad (4.3.64)$$

$$p_{3,4} = -1,5548 \pm j2,9688 \quad (4.3.65)$$

$$p_5 = -0,8904 \quad (4.3.66)$$

$$p_6 = -0,2000 \quad (4.3.67)$$

Usando MAPLE, se resuelven las ecuaciones (4.3.45)-(4.3.48), con lo que se obtiene:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -0,08660066377 & -0,002531761537 \\ -1,829469496 & -0,01929028138 \end{bmatrix} \quad (4.3.68)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1,701865673 & -0,04917856285 & -12,78216810 & -0,8717945054 \\ 198,4064952 & 5,229535640 & 1320,562799 & 45,93948229 \end{bmatrix} \quad (4.3.69)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 660,2813993 & 22,96974115 \\ -12,78216810 & -0,8717945054 \end{bmatrix} \quad (4.3.70)$$

El controlador equivalente es:

$$\mathbf{C}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{1,9752 \cdot 10^{-11}(s^2 + 10,75s + 4125)} & \frac{-1,459 \cdot 10^{-8}(s - 16,26)^2}{\frac{s^2}{s+4}} \\ \frac{s^2}{s} \end{bmatrix} \quad (4.3.71)$$

Considerando los problema de precisión numérica, éste es el mismo controlador que el dado en el lazo original.

Si se calculan los polos determinados por la matriz de ganancia \mathbf{J} del observador, en la ecuación (4.3.28), estos son $\{-1,5548 \pm j2,9688\}$.

Si se calculan los polos determinados por la matriz de ganancia \mathbf{K} de realimentación del estado, en la ecuación (4.3.30), estos son $\{-0,20, -0,89, -6,00 \pm j2,00\}$.

En tanto que en la Figura 4.9, se muestra la respuesta del lazo de control por realimentación del estado, en que se utilizan las matrices de ganancia obtenidas, cuando se introducen los mismos escalones en las referencias considerados en la Figura 4.8, pero incorporando el prefiltro necesario:

$$\mathbf{F}_r(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s+1)(s-22,45)}{(s^2+3,11s+11,23)} & \frac{-1,459 \cdot 10^{-8}(s+1)(s-1,81 \cdot 10^{11})}{s^2+3,11s+11,23} \\ \frac{1,9752 \cdot 10^{-11}(s+4)(s-1,122 \cdot 10^{10})}{s^2+3,11s+11,23} & \frac{(s+4)(s+25,56)}{s^2+3,11s+11,23} \end{bmatrix} \quad (4.3.72)$$

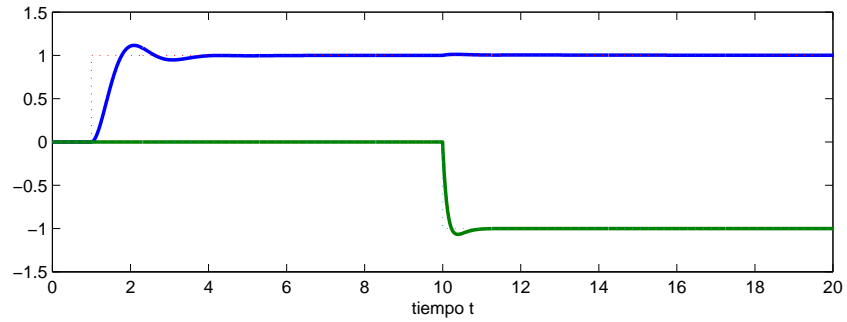


Figura 4.9. Respuesta del lazo de realimentación del estado observado

Este ejemplo demuestra la validez del método planteado para sistemas multivariables, con la única dificultad que significa resolver el sistema de ecuaciones no lineales dado.

SISTEMAS ESCALARES Y DE TIEMPO DISCRETO

En este capítulo se revisan las expresiones para el observador de orden reducido, la realimentación del estado observado, la equivalencia con un esquema de control clásico y otros temas desarrollados en los capítulos anteriores, cuando se consideran sistemas escalares, es decir, con una variable de entrada y una de salida, y luego para sistemas de tiempo discreto. Respecto a los primeros, se obtienen algunas expresiones más simples que las antes obtenidas, mientras que para los sistemas discretos las expresiones no se modifican debido a que se han utilizado modelos en variables de estado.

5.1. Reducción de las expresiones para sistemas escalares

En esta sección se analiza como simplificar las expresiones obtenidas en los desarrollos previos, en el caso particular en que los sistemas involucrados son escalares, es decir, la planta tiene n estados, con una entrada $u(t)$ y una salida $y(t)$. El objetivo de este estudio es obtener expresiones más simples, tanto para el observador, los polos de lazo cerrado y el controlador equivalente en un lazo de control clásico.

5.1.1. La planta

Si se considera el caso escalar, en las ecuaciones de estado de la planta (2.1.1)-(2.1.2) las matrices de \mathbf{B} y \mathbf{C}^T son vectores que pertenecen a \mathbb{R}^n . Es más, a partir de la función de transferencia de la planta se puede obtener su representación en variables de estado en la forma (2.1.6)-(2.1.7). Esto es, dada la planta:

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (5.1.1)$$

su expresión en la forma (2.1.6)-(2.1.7) es:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.1.2)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{x}(t) \quad (5.1.3)$$

Este modelo en variables de estado resulta completamente controlable y completamente observable, pues se obtuvo a partir de la función de transferencia de la planta (5.1.1).

Si la matriz \mathbf{A} se particiona como se hace en la ecuación (2.1.15), que ya se ha usado en las secciones anteriores, las submatrices son bastante simples:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (5.1.4)$$

En que

$$\mathbf{A}_{11} = [-a_{n-1}] \quad \mathbf{A}_{12} = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (5.1.5)$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} -a_{n-2} \\ \vdots \\ -a_1 \\ -a_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.6)$$

5.1.2. El observador de orden reducido

Si se considera el observador de orden reducido que estima el estado de esta planta, en primer lugar se observa que su ganancia es un vector columna:

$$\mathbf{J} = [j_1 \ \dots \ j_{n-1}]^T \quad (5.1.7)$$

Si bien las ecuaciones del observador (2.1.26)-(2.1.27) no se pueden simplificar mucho con esta consideración, no ocurre lo mismo con la expresión para sus polos. Se debe recordar que éstos determinan la velocidad de convergencia del error de estimación y son polos del lazo cerrado cuando se realimenta el estado observado. El siguiente Lema establece cuál es el polinomio característico del observador y pone de manifiesto que sus raíces pueden situarse arbitrariamente sobre el plano complejo al elegir los coeficientes de \mathbf{J} .

Lema 21. *Para un sistema escalar, representado en su forma canónica observable (5.1.2)-(5.1.3), los polos del observador de orden reducido asociado con matriz de ganancia definida en (5.1.7), están dados por las $n - 1$ raíces del polinomio:*

$$E(s) = s^{n-1} + j_1 s^{n-2} + \dots + j_{n-2} s + j_{n-1} \quad (5.1.8)$$

Demostración

Los polos del observador de orden reducido para un sistema representado en su forma canónica observable están dados por la ecuación (2.1.28). Si en ésta se reemplazan las matrices obtenidas para un sistema escalar se tiene que:

$$\det(s\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{J}\mathbf{A}_{12}) = 0 \quad (5.1.9)$$

$$\det \left(s\mathbf{I}_{n-1} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_{n-2} \\ j_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (5.1.10)$$

$$\det \begin{bmatrix} s + j_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ j_2 & s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ j_3 & 0 & s & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ j_{n-1} & 0 & & \dots & & s \end{bmatrix} = 0 \quad (5.1.11)$$

Si se calcula este determinante, desarrollándolo por ejemplo a lo largo de la primera columna se obtiene que el polinomio expresado en (5.1.8).

□□□

5.1.3. La realimentación del estado

Tal como antes, se cierra el lazo de control realimentando la estimación del estado que entrega el observador de orden reducido, a través de una matriz de ganancia, que en este caso resulta ser un vector fila:

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad \dots \quad k_n] \quad (5.1.12)$$

El Principio de Separación (Lema 14, página 29) indica que los polos del lazo cerrado de control quedan determinados en parte por la ganancia del observador, y en parte por la ganancia de realimentación. Aunque los polos debidos al observador se pueden obtener a partir del polinomio (5.1.8), los restantes se obtienen de la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = 0 \quad (5.1.13)$$

que no puede simplificarse más aunque se reemplacen las matrices para este caso en que se analizan sistemas escalares.

5.1.4. El controlador equivalente

La expresión del controlador clásico equivalente al lazo de realimentación del estado, que se presentó en el Lema 15 (pág.32), puede ser reescrita para sistemas escalares, aunque no resulta simple, por ejemplo, el reconocer los polos del controlador.

El controlador se puede expresar como:

$$C(s) = \mathbf{C}_c(s\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c \quad (5.1.14)$$

en que las matrices son:

$$\mathbf{A}_c = [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-1}] (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.1.15)$$

$$\mathbf{B}_c = [-\mathbf{J} \quad \mathbf{I}_{n-1}] (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (5.1.16)$$

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix} = [k_2 \quad \dots \quad k_n] \quad (5.1.17)$$

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} = k_1 + k_2 j_1 + \dots + k_n j_{n-1} \quad (5.1.18)$$

Los polos del controlador están dados por los autovalores de la matriz \mathbf{A}_c , tal como se explicitó en la ecuación (2.2.56), sin embargo, al reemplazar las matrices del caso *SISO* ($m = 1$) tampoco se aprecia alguna simplificación de las expresiones.

Otra observación interesante es que si se considera la expresión de la matriz de paso directo \mathbf{D}_c del controlador, ésta corresponde al producto punto de dos vectores. Esto indica que será nula sólo cuando estos vectores sean ortogonales, es decir, cuando:

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{K} \perp \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (5.1.19)$$

Esta condición es la que determina si el controlador es bipropio, cuando $\mathbf{D}_c \neq 0$ o estrictamente propio, cuando $\mathbf{D}_c = 0$.

5.1.5. Esquema con integración

Un caso interesante de estudiar para sistemas escalares es cuando el controlador tiene integración, lo cual asegura error estacionario cero a la referencia y/o las perturbaciones son constantes. De las dos posibilidades vistas para forzar integración en el controlador equivalente, se revisa la que supone una perturbación de entrada constante en la planta dando origen a un modelo ampliado.

Una señal constante se puede modelar en variables de estado mediante las ecuaciones de estado

$$\dot{x}_d(t) = 0 \quad (5.1.20)$$

$$d(t) = x_d(t) \quad (5.1.21)$$

Usando las ecuaciones (3.1.8)-(3.1.9), donde $(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o)$ son las matrices de la representación de estado de la planta en la forma (2.1.6)-(2.1.7), el modelo ampliado que se obtiene es:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & b_{n-1} \\ -a_{n-2} & 0 & \dots & 0 & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.1.22)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \mathbf{x}(t) \quad (5.1.23)$$

Las expresiones del observador de orden reducido para esta planta ampliada son análogas a las antes obtenidas. El observador en este caso hace una estimación de los estados de la planta y de la perturbación, que se incluyó como un estado adicional. Por esto la matriz de ganancia del observador es un vector columna, pero de dimensión $n + 1$:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_o \\ j_d \end{bmatrix} \quad (5.1.24)$$

Se realimenta el estado de la planta ampliada de manera conveniente, que permita compensar totalmente la perturbación de entrada en base a su estimación:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_o \quad 1] \quad (5.1.25)$$

El controlador equivalente que se obtiene es el que se define en las ecuaciones (3.1.36)-(3.1.40). En tanto que sus n polos están dados por la ecuación (3.1.35), que en este caso escalar es:

$$s \cdot \det \left(s\mathbf{I}_{n-1} - [-\mathbf{J}_o \quad \mathbf{I}_{n-1}] (\mathbf{A}_o - \mathbf{B}_o\mathbf{K}_o) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (5.1.26)$$

Es decir, a los polos del controlador equivalente para la realimentación del estado de la planta original, se agrega el polo de la perturbación, que permite compensarla, lo cual corresponde al Principio del Modelo Interno.

5.2. Expresiones para sistemas de tiempo discreto

En la presente sección se revisan los desarrollos previos considerando sistemas definidos en el dominio del tiempo discreto k y usando la transformada Zeta. Interesa identificar y distinguir las diferencias con el caso de tiempo continuo que previamente se ha analizado con amplio detalle. Es importante mencionar que, dado que los desarrollos se han hecho usando modelos en variables de estado para los sistemas, las expresiones se mantienen invariantes y son por tanto válidas para el dominio del tiempo discreto y continuo.

5.2.1. La planta

Un modelo en variables de estado de tiempo discreto puede obtenerse a partir de dos tipos de sistema: a partir de un sistema o fenómeno intrínsecamente discreto, en el cual sus variables se encuentran definidas sólo en algunos instantes de tiempo, o bien, a partir de un sistema de tiempo continuo que es muestreado para interactuar con dispositivos digitales. En ambos casos, la variable temporal que se utiliza es k para referirse a los instantes en que las señales se encuentran definidas.

De esta forma el modelo en variables de estado de una planta en tiempo discreto queda definido por las ecuaciones

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] \quad (5.2.1)$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] \quad (5.2.2)$$

Estas ecuaciones corresponden a las mismas expresadas en (1.1.4)-(1.1.5) en la página 2, pero hemos supuesto la matriz $\mathbf{D} = 0$ entre la entrada $u[k]$ y la salida $y[k]$, pues los sistemas, en general, no tienen paso directo.

Se supone un sistema de orden n , con m entradas y m salidas, por tanto, las dimensiones de las matrices son:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad ; \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad ; \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (5.2.3)$$

El sistema también se puede representar en un modelo de entrada-salida a través de la función (matriz) de transferencia:

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \underbrace{\mathbf{D}}_0 \quad (5.2.4)$$

Esta función (matriz) de transferencia se puede obtener aplicando transformada Zeta a las ecuaciones (5.2.1)-(5.2.2), o bien a las ecuaciones recursivas que definan el sistema.

5.2.2. El observador de orden reducido

Análogamente al caso de tiempo continuo, el observador de orden reducido hace una estimación del estado de la planta aprovechando directamente la información

contenida en la salida $\mathbf{y}[k]$ de dimensión m y estimando sólo los $n - m$ estados restantes.

La planta se supone expresada análogamente a la forma (2.1.6)-(2.1.7) usada para simplificar las expresiones en tiempo continuo. Esto es, en las ecuaciones (5.2.1)-(5.2.2) se considera:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I}_m \quad 0] \quad (5.2.5)$$

Con esta simplificación, se obtienen las ecuaciones de estado del observador de orden reducido para tiempo discreto:

$$\mathbf{q}[k+1] = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{q}[k] + \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{y}[k] + \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{u}[k] \quad (5.2.6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1] = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{q}[k] + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \mathbf{y}[k] \quad (5.2.7)$$

En que $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$ es la ganancia de realimentación del observador.

Se debe hacer notar que las expresiones matriciales en variables de estado se mantienen al cambiar de tiempo discreto a continuo pues la única diferencia es que el operador derivada, propio de tiempo continuo, se cambia por el operador de adelanto, para el caso de tiempo discreto.

5.2.3. Realimentación del estado observado

Si se cierra un lazo de realimentación del estado observado como el de la Figura 5.1 con la estimación que entrega el observador de orden reducido, entonces la entrada al sistema queda definida por la ecuación:

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{r}[k] - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}[k] \quad (5.2.8)$$

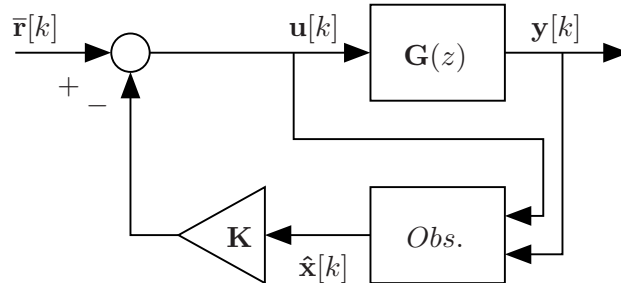


Figura 5.1. Control por realimentación del estado observado

Los polos de lazo cerrado del sistema completo están dados entonces por el siguiente Lema, que es la contraparte en tiempo discreto del principio de separación presentado en el Lema 14 en la página 29.

Lema 22. *Dada una planta (5.2.1)-(5.2.2), su observador de orden reducido asociado (5.2.6)-(5.2.7), y la realimentación del estado observado (5.2.8), entonces*

- (i) *Los polos de lazo cerrado del sistema completo son las $2n - m$ raíces del polinomio:*

$$A_{cl}(z) = \underbrace{\det(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK})}_{F(z)} \underbrace{\det(z\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{JA}_{12})}_{E(z)} \quad (5.2.9)$$

En que la matriz \mathbf{A} se ha particionado según la ecuación (2.1.15) en la página 25.

- (ii) *Los estados del sistema que corresponden al error de estimación $\tilde{\mathbf{x}}_2[k]$ del observador de orden reducido, **son no controlables** desde la entrada del sistema completo $\bar{\mathbf{r}}[k]$.*

Demostración

Es análoga al caso continuo.

□□□

5.2.4. El controlador equivalente

El esquema de realimentación del estado observado se puede llevar a un esquema de control discreto clásico como el de la Figura 5.2. Se debe notar que la referencia que actúa como entrada en este lazo de control no es la misma del lazo de realimentación del estado, sino que ambas quedan relacionadas a través de un prefiltro. Se tiene el siguiente Lema que relaciona ambos esquemas de control en tiempo discreto.

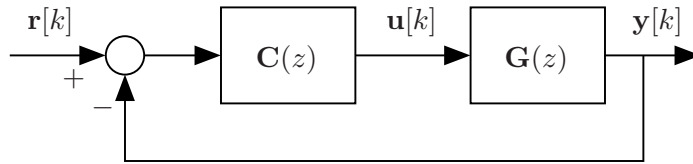


Figura 5.2. Esquema de control clásico en tiempo discreto

Lema 23. *Dado el sistema de la Figura 5.1, en que la planta está definida por (5.2.1)-(5.2.2), su observador de orden reducido asociado (5.2.6)-(5.2.7), y la realimentación del estado observado (5.2.8), este es equivalente el esquema de la Figura 5.2, en que el controlador tiene una realización mínima expresada mediante:*

$$\mathbf{C}(z) = \mathbf{C}_c (z\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c \quad (5.2.10)$$

en que:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (5.2.11)$$

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_c = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (5.2.12)$$

Por su parte, la señal de referencia $\mathbf{r}[k]$, en el lazo de control clásico se relaciona con $\bar{\mathbf{r}}[k]$ según la ecuación:

$$\bar{\mathbf{R}}(z) = \underbrace{(\mathbf{C}_f (z\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_f)^{-1} \mathbf{B}_f + \mathbf{D}_f)}_{\mathbf{F}_r(z)} \mathbf{R}(z) \quad (5.2.13)$$

en que:

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (5.2.14)$$

$$\mathbf{C}_f = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_f = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (5.2.15)$$

Demostración

Es análoga al caso de tiempo continuo.

□□□

5.2.5. Esquema con integración

En el caso de tiempo discreto se pueden aplicar cualquiera de los dos esquemas propuestos en sistemas de tiempo continuo para obtener controladores equivalente con integración. Estos métodos son:

- Modelar perturbaciones de entrada contantes, incluyéndolas en un modelo ampliado de la planta. Estas perturbaciones son estimadas por el observador y compensadas convenientemente con la ganancia de realimentación.
- Agregando un lazo de control externo con m integradores, en paralelo a la realimentación del estado observado.

En ambos casos se obtiene un controlador equivalente con m polos en $z = 1$, que corresponde a tener integración en tiempo discreto.

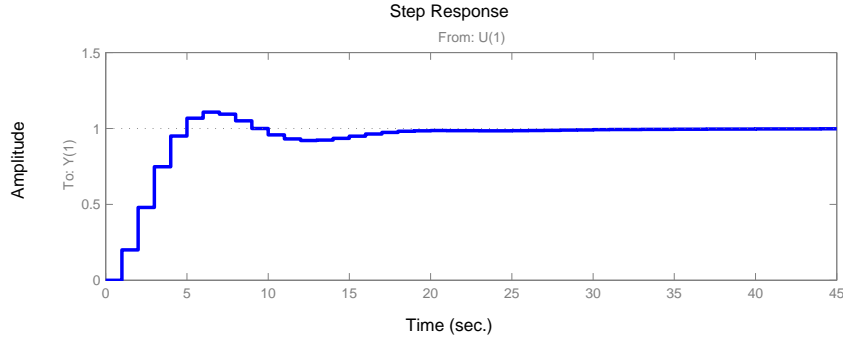


Figura 5.3. Respuesta a escalón del lazo de control

Naturalmente, el modelado de perturbaciones en la entrada de la planta se puede extender no solo a constantes sino que, en general, a cualquier tipo de perturbación. Como se comentó en la Sección §3.1, las perturbaciones a modelar son aquellas asociadas a polos en el límite de estabilidad, es decir, constantes y oscilaciones sostenidas. En el caso de los sistemas de tiempo discreto el límite de estabilidad corresponde al círculo unitario $|z| = 1$.

Para ilustrar el uso del observador de orden reducido se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13. Se considera un lazo de control en que la planta de tiempo discreto está definida por la función de transferencia:

$$G(z) = \frac{(z - 0,9)}{(z - 0,7)(z - 0,8)} = \frac{z - 0,9}{z^2 - 1,5z + 0,56} \quad (5.2.16)$$

y el controlador es bipropio y con un único polo en $z = 1$, definido por la ecuación:

$$C(z) = \frac{0,2z}{z - 1} \quad (5.2.17)$$

La respuesta del sistema en lazo cerrado a un escalón en la referencia $r[k]$ se muestra en la Figura 5.3.

Los polos de lazo cerrado en este lazo de control clásico se ubican en:

$$p_{1,2} = 0,69428 \pm j0,36385 \quad ; \quad p_3 = 0,91145 \quad (5.2.18)$$

De estos polos, se asignan $n - m = 2 - 1 = 1$ al observador, resolviendo la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{J}\mathbf{A}_{12}) = (s - 0,91145) \quad (5.2.19)$$

de donde se obtiene:

$$\mathbf{J} = [-0,91145] \quad (5.2.20)$$

Mientras que los $n = 2$ polos de lazo cerrado restantes se asignan mediante la ganancia de realimentación. Se resuelve la ecuación:

$$\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = (s - 0,69428 + j0,36385)(s - 0,69428 - j0,36385) \quad (5.2.21)$$

de donde se obtiene:

$$\mathbf{K} = [-6,85051 \quad -7,73550] \quad (5.2.22)$$

Con estas constantes se construye el controlador equivalente, usando la ecuación (5.2.10), lo cual lleva a:

$$C_{eq}(z) = \frac{0,2z - 3,152 \cdot 10^{-14}}{z - 1} \quad (5.2.23)$$

Donde se hace evidente un pequeño error numérico en la posición del cero.

El prefiltro que se debe usar está dado por la ecuación (5.2.13), esto es:

$$F_r(s) = \frac{0,2z - 3,152 \cdot 10^{-14}}{z - 0,9114} \quad (5.2.24)$$

En el ejemplo se puede apreciar que para la elección de las matrices de ganancia \mathbf{J} y \mathbf{K} , del observador del orden reducido y de la realimentación del estado observado, se procede de manera similar al caso de tiempo continuo. Esto es, parte de los polos de lazo cerrado se asignan a cada matriz de ganancia y se resuelven la ecuación respectiva. La única diferencia importante entre ambos casos, el de tiempo continuo y el de tiempo discreto, es la elección de los polos de lazo cerrado pues la región de estabilidad en tiempo discreto es el interior del disco unitario, es decir, la región $|z| < 1$, mientras que en tiempo continuo es el semiplano izquierdo abierto, es decir, la región $\Re\{s\} < 0$.

CONCLUSIONES

En base al trabajo desarrollado en la presente Tesis, es importante destacar que la principal conclusión que se puede extraer de ella es la ventaja que se obtiene al usar en un esquema de realimentación del estado el observador de orden reducido o de Luenberger. Esto es:

Cualquier lazo de control en su esquema clásico, formado por la planta y un controlador, puede ser interpretado como un esquema en que se realimenta linealmente el estado estimado de la planta a través de un observador de orden reducido, tanto si el controlador es bipropio como si es estrictamente propio.

A pesar que esta unificación entre los esquemas clásico y moderno ya ha sido establecida en la literatura, la importancia de los desarrollos presentados reside en extender la equivalencia a **cualquier** controlador, sin restricciones en su grado relativo.

La metodología presentada para establecer la equivalencia entre los esquemas de control clásico y de realimentación del estado, funciona muy bien para el caso de sistemas escalares, tal como se aprecia en cada uno los diferentes ejemplos desarrollados. Es necesario tener presente que esta equivalencia, en algunos casos, puede ser establecida sólo si se aumenta artificialmente el orden de la planta o del controlador. En el primer caso, se incorporan al modelo de la planta perturbaciones (existentes o supuestas) que permiten explicar la presencia de polos adicionales en el controlador, lo cual es bastante razonable pues en muchas ocasiones un controlador se diseña con el objeto de compensar la presencia de estas perturbaciones. En el segundo caso, se suponen cancelaciones entre polos y ceros del controlador, que no son más que manipulaciones algebraicas de manera de agregar polos de lazo cerrado al sistema que permitan calcular las matrices de ganancia del observador y de la realimentación del estado que permiten obtener el controlador dado.

Sin embargo, los resultados obtenidos para sistemas multivariables no son satisfactorios, ya que, si bien se establece claramente la equivalencia teórica entre los lazos de control, resulta bastante complejo determinar explícitamente cuáles son las matrices de ganancia en un esquema de realimentación del estado observado que corresponden a un lazo de control clásico dado. Esta complejidad es propia de los

sistemas multivariables, ya que además de sus polos, éstos quedan caracterizados por su estructura y direccionalidad de sus ceros. De hecho, si se utiliza el método desarrollado para sistemas escalares a sistemas multivariables, se obtiene un controlador equivalente diferente al dado, pero que mantiene los mismos polos de lazo cerrado, tal como se puede apreciar en las simulaciones. Esto se debe a los grados de libertad existentes en la ecuación de asignación de polos de lazo cerrado, que da origen a diferentes controladores posibles sin modificar la ubicación de dichos polos.

Las ecuaciones propuestas como alternativa para determinar las matrices de ganancia en un esquema de realimentación del estado equivalente son muy complejas computacionalmente, por tanto sólo sirvieron para algunos ejemplos con plantas y controladores bastante simples. Si bien estas mismas ecuaciones fueron modificadas para simplificar los cálculos, el problema computacional persistió (se utilizó el programa MAPLE 6). Esta dificultad queda abierta a buscar otras formas de establecer explícitamente las matrices de ganancia \mathbf{J} y \mathbf{K} requeridas, que garanticen que el controlador equivalente sea igual al controlador del lazo multivariable dado. Las ecuaciones planteadas contienen también a la matriz \mathbf{T} como transformación de similaridad, que no es necesaria de obtener explícitamente, pues no interesa una realización particular del controlador, sino solo su matriz de transferencia.

Si bien el uso del observador de orden reducido se muestra ventajoso en el sentido de aportar a la unificación entre los enfoques clásico y moderno para el diseño y análisis de un lazo de control, es importante hacer notar una limitación fundamental. El observador de orden reducido supone que de la salida de la planta se puede extraer directamente información sobre parte de su vector de estado. Esta suposición, que evita tener que estimar todos los estados de la planta, no es muy práctica si se considera, por ejemplo, la presencia de ruido en la medición de $\mathbf{y}(t)$. Si se intenta implementar cualquier forma de eliminar ese ruido, lo que se estaría haciendo es estimar la salida, es decir, estimar también esa parte del estado de la planta. Esto significa volver al esquema en que se hace la estimación mediante un observador de orden completo. De hecho, dentro de la investigación desarrollada para este trabajo, se estudió una forma del filtro de Kalman de tiempo discreto que posee paso directo en la estimación del estado, pero que hace una estimación de todas las variables del estado y por tanto no es equivalente al observador de orden reducido utilizado.

Otra conclusión de interés es la elección de la mejor estrategia para incorporar integración en un lazo de realimentación del estado observado, o en el caso que se busca interpretar la integración en un controlador clásico. Si se comparan las estrategias propuestas en la Sección §3.2 se aprecia que puede considerarse mejor la que a través del modelado, estimación y compensación de perturbaciones de entrada constantes (reales o ficticias) consigue forzar la presencia de polos en el origen para el controlador. La ventaja de este enfoque es su simplicidad, pues sólo requiere que se amplíe el modelo de la planta al incorporar las perturbaciones, y luego elegir la ganancia de realimentación proporcional convenientemente para compensar su efecto sobre la entrada del sistema. Esto se traduce en poder utilizar **las mismas**

expresiones para el observador, para el controlador y para los polos de lazo cerrado. Algunas de las líneas de trabajo a futuro que podrían seguirse son:

- Mejorar el método propuesto para obtener explícitamente la equivalencia entre un lazo de control clásico multivariable y el esquema de realimentación del estado observado, que involucra resolver simultáneamente las ecuaciones (4.3.41)-(4.3.44). En esta tesis sólo se plantean formas de simplificar la resolución de dichas ecuaciones, siendo interesante desarrollar un enfoque más adecuado conceptual y prácticamente, de forma análoga al caso *SISO* en que es suficiente utilizar el Principio de Separación para los polos de lazo cerrado.
- Encontrar expresiones que permitan obtener un observador de orden reducido óptimo en presencia de ruido. Es decir, a pesar que dicho observador extrae parte del estado directo de la salida de la planta, encontrar la ganancia óptima \mathbf{J}_{opt} , que minimice un funcional de costo sobre el error de estimación del resto del vector de estado.
- Establecer, en el caso de sistemas multivariables, una conexión entre la estructura de un controlador clásico con el esquema de realimentación del estado, de manera de poder apreciar desde el punto de vista de los modelos de estado el significado de restringir un controlador en estructura haciendo uso de medidas de interacción sobre la planta¹

¹Tema ampliamente desarrollado en la literatura por sus aplicaciones prácticas y abierto a nuevos aportes.

PROPIEDADES DE MATRICES Y DETERMINANTES

A.1. Lema de inversión matricial

Para las propiedades que siguen se considera una matriz cuadrada, definida por bloques, de la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(p+q) \times (p+q)} \quad (\text{A.1.1})$$

en que las submatrices tienen dimensiones

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p} & \mathbf{A}_{12} \in \mathbb{R}^{p \times q} \\ \mathbf{A}_{21} \in \mathbb{R}^{q \times p} & \mathbf{A}_{22} \in \mathbb{R}^{q \times q} \end{array}$$

Si las matrices \mathbf{A}_{11} y \mathbf{A}_{22} son **no singulares**, al igual que las matrices:

$$\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \quad (\text{A.1.2})$$

entonces, se tienen las siguientes propiedades:

Propiedad 1. *La matriz \mathbf{A} definida en (A.1.1) es no singular y su inversa es:*

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1} \\ -(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

o bien:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1} & -(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.4})$$

Propiedad 2. En particular, dadas submatrices como las que forman la matriz (A.1.1), entonces:

$$(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1} = \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} \quad (\text{A.1.5})$$

Propiedad 3. También, dadas submatrices como las que forman la matriz (A.1.1), se tiene que:

$$\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1} = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \quad (\text{A.1.6})$$

Propiedad 4. El determinante de la matriz definida en (A.1.1), se puede calcular como:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_{11}) \cdot \det(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}) \quad (\text{A.1.7})$$

o bien:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_{22}) \cdot \det(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}) \quad (\text{A.1.8})$$

Demostración

Para probar las Propiedades 1, 2, 3 y 4, la matriz \mathbf{A} se escribe en la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & 0 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.9})$$

y de la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ 0 & \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.10})$$

Calculando los determinantes de las matrices en estas ecuaciones, se prueba (A.1.7) y (A.1.8). Se debe observar que esto asegura que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, es decir, \mathbf{A} es no singular. Ahora, se observa que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1} \\ 0 & (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.11})$$

y, además:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & 0 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & 0 \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.12})$$

Estas dos ecuaciones se pueden utilizar cuando se aplica inversión matricial en la ecuación (A.1.9):

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & 0 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A.1.13})$$

Reemplazando y haciendo el producto matricial, se prueba la ecuación (A.1.3). La ecuación (A.1.4) se prueba de manera análoga.

Finalmente, la ecuación (A.1.5) se obtiene de igualar los bloques superiores izquierdos en las matrices (A.1.3) y (A.1.4), mientras que la ecuación (A.1.6) de forma análoga, pero igualando los bloques superiores derechos.

□□□

A partir de las propiedades anteriores, se obtienen las siguientes que también resultan de mucha utilidad y su expresión es más simple.

Propiedad 5. Dadas las matrices $\mathbf{M}_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $\mathbf{M}_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, entonces:

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)^{-1}\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1(\mathbf{I}_m - \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1)^{-1} \quad (\text{A.1.14})$$

Demostración

Es directa de la ecuación (A.1.6), haciendo:

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{I}_m \quad ; \quad \mathbf{A}_{12} = \mathbf{M}_1 \quad ; \quad \mathbf{A}_{21} = \mathbf{M}_2 \quad ; \quad \mathbf{A}_{22} = \mathbf{I}_n \quad (\text{A.1.15})$$

□□□

Propiedad 6. Dadas las matrices $\mathbf{M}_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{M}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{M}_3 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, entonces:

$$(\mathbf{I}_m + \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_3)^{-1} = \mathbf{I}_m - \mathbf{M}_1(\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_3\mathbf{M}_1)^{-1}\mathbf{M}_3 \quad (\text{A.1.16})$$

Demostración

Es directa de la ecuación (A.1.5), haciendo:

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{I}_m \quad ; \quad \mathbf{A}_{12} = -\mathbf{M}_1 \quad ; \quad \mathbf{A}_{21} = \mathbf{M}_3 \quad ; \quad \mathbf{A}_{22} = \mathbf{M}_2 \quad (\text{A.1.17})$$

□□□

Propiedad 7. Dadas las matrices $\mathbf{M}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{M}_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $\mathbf{M}_3 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, entonces:

$$(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_3)^{-1} = \mathbf{M}_1^{-1} - \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_2 (\mathbf{I}_n + \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_2)^{-1} \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1^{-1} \quad (\text{A.1.18})$$

Demostración

Es directa de la ecuación (A.1.5), haciendo:

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{M}_1 \quad ; \quad \mathbf{A}_{12} = -\mathbf{M}_2 \quad ; \quad \mathbf{A}_{21} = \mathbf{M}_3 \quad ; \quad \mathbf{A}_{22} = \mathbf{I}_m \quad (\text{A.1.19})$$

□□□

Propiedad 8. Dadas las matrices $\mathbf{M}_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $\mathbf{M}_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, entonces:

$$\det(\mathbf{I}_n - \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2) = \det(\mathbf{I}_m - \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1) \quad (\text{A.1.20})$$

Demostración

Es directa de aplicar la Propiedad 4 a la matriz:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.21})$$

□□□

MODELOS EN VARIABLES DE ESTADO

Las propiedades que se detallan en este apéndice se refieren a sistemas de tiempo continuo, sin embargo, se pueden aplicar de igual forma a sistemas de tiempo discreto, cambiando las derivadas en t por corrimientos en k , y la variable s por z .

B.1. Interconexión de sistemas

Para obtener la representación en variables de estado de sistemas complejos resulta muy útil el descomponerlos como subsistemas interconectados entre sí de diferentes formas. En general, los subsistemas están interconectados de alguna de las siguientes tres formas fundamentales: en serie, en paralelo o en realimentación. En estos tres casos se puede obtener una representación de estado para el sistema completo a partir de las representaciones de los subsistemas involucrados.

Para las siguientes propiedades se usan los siguientes sistemas, definidos por su expresión en variables de estado:

$$\text{Sistema 1: } \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1(t) \quad (\text{B.1.1})$$

$$\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{D}_1\mathbf{u}_1(t) \quad (\text{B.1.2})$$

$$\text{Sistema 2: } \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_2(t) \quad (\text{B.1.3})$$

$$\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{D}_2\mathbf{u}_2(t) \quad (\text{B.1.4})$$

Propiedad 9. *Conexión en serie.*

La interconexión de sistemas en serie se muestra en la Figura B.1, que también se conoce como conexión en cascada. Para obtener el modelo en variables de estado del sistema completo, se debe notar que $\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{u}_1(t)$. Además, considerando el sistema completo, su entrada es $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_2(t)$ y su salida es $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_1(t)$. Así se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (\text{B.1.5})$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (\text{B.1.6})$$

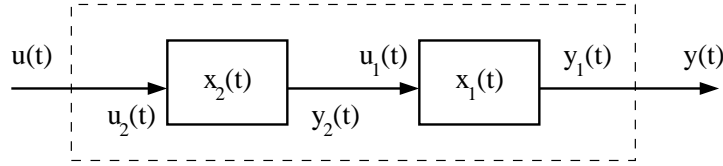


Figura B.1. Conexión de sistemas en serie.

Propiedad 10. Conexión en paralelo.

La interconexión de sistemas en paralelo se muestra en la Figura B.2. Para obtener su representación en variables de estado, se debe observar que la entrada al sistema completo es $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$ y su salida satisface la relación $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t)$. Así se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (\text{B.1.7})$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (\text{B.1.8})$$

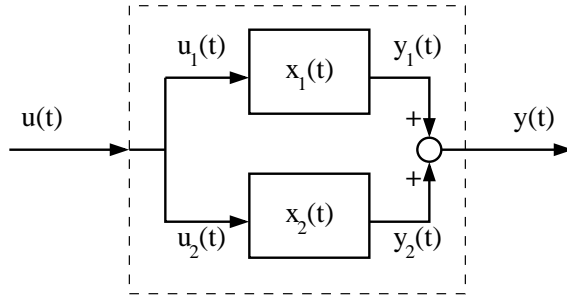


Figura B.2. Conexión de sistemas en paralelo.

Propiedad 11. Conexión en realimentación (negativa).

La interconexión de sistemas que se muestra en la Figura B.3 se conoce como conexión en realimentación (negativa y unitaria), y corresponde a la estructura básica de un lazo de control, donde S_1 es la planta y S_2 es el controlador. Para obtener el modelo en variables de estado para el sistema completo se debe observar que la entrada al sistema completo satisface la ecuación $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_2(t) + \mathbf{y}_1(t)$, la salida del sistema es $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_1(t)$, y la conexión entre los sistemas establece que $\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{u}_1(t)$. Además, la planta usualmente es estrictamente propia, por tanto podemos suponer que la matriz de paso directo del sistema S_1 es $\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}$. Así se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (\text{B.1.9})$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.10})$$

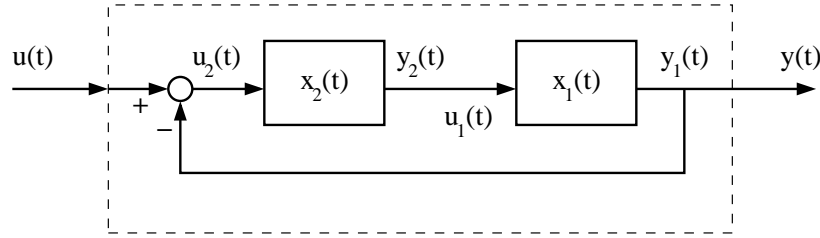


Figura B.3. Sistemas en lazo de realimentación negativa.

B.2. Inverso de un sistema

Propiedad 12. Dado un sistema completamente controlable y observable, definido en variables de estado por las ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (\text{B.2.1})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (\text{B.2.2})$$

y su matriz (o función) de transferencia:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (\text{B.2.3})$$

entonces, el inverso del sistema es:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{y}(t) \quad (\text{B.2.4})$$

$$\mathbf{u}(t) = (-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{y}(t) \quad (\text{B.2.5})$$

Y su matriz (o función) de transferencia es:

$$\mathbf{G}^{-1}(s) = (-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}))^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1} \quad (\text{B.2.6})$$

Demostración

Es directa de utilizar la Propiedad de Inversión Matricial 2, para obtener la inversa de la función de transferencia (B.2.3):

$$\mathbf{G}^{-1}(s) = (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D})^{-1} \quad (\text{B.2.7})$$

$$= \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}(-\mathbf{C})((s\mathbf{I} - \mathbf{A}) - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}(-\mathbf{C}))^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \quad (\text{B.2.8})$$

$$= (-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}))^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}) + (\mathbf{D}^{-1}) \quad (\text{B.2.9})$$

De donde se pueden extraer las matrices de la representación de estado para este sistema, que es el inverso del sistema original.

□□□

BIBLIOGRAFÍA

- [1] B.D.O. Anderson and John Moore. *Optimal filtering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1979.
- [2] Guang-Ren Duan, Steve Thompson, and Guo-Ping Liu. Separation principle for robust pole assignment – an advantage of full-order state observers. *38th IEEE CDC*, 1999.
- [3] B.A. Francis and W. Wonham. The internal model principle of control theory. *Automatica*, 12:457–465, 1976.
- [4] G.F. Franklin, J.D. Powell, and A. Emami-Nagiri. *Feedback Control of Dynamics Systems*. Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass., 1991.
- [5] Graham C. Goodwin, Stefan Graebe, and Mario E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, New Jersey, 2001.
- [6] Graham C. Goodwin and K. Sin. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1984.
- [7] Thomas Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [8] R.E. Kalman and R.S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Trans ASME J.Basic Eng.*, 83:95–107, 1961.
- [9] J. Kautsky, N.K. Nichols, and P. van Dooren. Robust pole assignment in linear state feedback. *Int. Journal of Control*, 41:1129–1155, 1985.
- [10] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley–Interscience, New York, 1972.
- [11] D. Luenberger. Canonical forms for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(6):190–293, 1967.
- [12] K. Ogata. *State Space Analysis of Control Systems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.

-
- [13] J.A. Profeta, W.G. Vogt, and M.H. Mickle. Disturbance estimation and compensation in linear systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 26:225–231, 1990.
 - [14] Erwin Schrijver, Johannes van Dijk, and Henk Nijmeijer. Equivalence of disturbance observer structures for linear systems. *ACC*, 2000.
 - [15] Joel Shields, Luis Alvarez, and Roberto Horowitz. The balance beam: An instructional experiment in state feedback and observer design. *36th IEEE CDC*, 1997.
 - [16] Lotfi A. Zadeh and Charles A. Desoer. *Linear System Theory: the state space approach*. McGraw Hill Book Company, New York, 1963.