

Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2010

Examen Final

Problema 1 Considere los siguientes conjuntos:

H : espacios de Hilbert,
 B : espacios de Banach,
 C : espacios completos,
 T : espacios topológicos,

M : espacios métricos,
 N : espacios normados,
 P : espacios con producto interno,
 V : espacios vectoriales.

Haga un sólo diagrama indicando la contención o intersección de dichos conjuntos, fundamentando claramente su respuesta.

Problema 2 Sea $T : H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal y acotado entre dos espacios de Hilbert H_1 y H_2 . Se define

$$\begin{aligned} \text{Rango de } T: \mathcal{R}(T) &= \{y \in H_2 : \text{existe } x \in H_1 \text{ tal que } y = Tx\} \\ \text{Espacio nulo de } T: \mathcal{N}(T) &= \{x \in H_1 : Tx = 0\} \end{aligned}$$

1. Demuestre que $\mathcal{R}(T)$ es un subespacio de H_2 y que $\mathcal{N}(T)$ es un subespacio de H_1 .
 2. Demuestre que $\mathcal{N}(T^*)$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{R}(T)$, en que T^* es el operador (Hilbert-)adjunto de T .
-

Problema 3 Considere una constante $\alpha > 1$ y las siguientes funciones en \mathcal{H}_2 :

$$f_0(s) = \frac{1}{s+1} \quad f_1(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} \quad f_2(s) = \frac{\alpha^2}{s+\alpha^2} \quad (1)$$

1. Determine si dichas funciones son ortogonales para el producto interno usual en $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$.
 2. Si no son ortogonales, determine una base ortonormal $\{e_0(s), e_1(s), e_2(s)\}$ para el subespacio generado por $\{f_0(s), f_1(s), f_2(s)\}$.
-

Problema 4 Demuestre que, si $y = y(x)$ satisface la ecuación de Euler-Lagrange asociada con la integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} [(p\dot{y})^2 + (qy)^2] dx \quad (2)$$

en que $p = p(x)$ y $q = q(x)$ son funciones conocidas, entonces el valor de la integral es $I = (p^2 y \dot{y}) \Big|_{x_1}^{x_2}$.

Problema 5 Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo descrito en variables de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4)$$

en que $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ y las matrices tienen las dimensiones apropiadas.

1. Demuestre que la función de transferencia asociada puede escribirse como

$$G(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} sI_n - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}}{\det(sI_n - A)} \quad (5)$$

2. Si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (6)$$

demuestre que $G(s) = 1/s^n$.

3. Si se muestrea el sistema correspondiente a las matrices (6) (usando un retentor de orden cero), se obtiene una representación discreta:

$$x(k\Delta + \Delta) = A_q x(k\Delta) + B_q u(k\Delta) \quad (7)$$

$$y(k\Delta) = C x(k\Delta) \quad (8)$$

en que $k \in \mathbb{Z}$ y Δ es el periodo de muestreo. Determine las matrices

$$A_q = e^{A\Delta} \quad (9)$$

$$B_q = \int_0^\Delta e^{A\eta} B d\eta \quad (10)$$

4. Demuestre que la función de transferencia asociada a la representación obtenida en el punto anterior es de la forma

$$G_q(z) = \frac{\Delta^n B_n(z)}{n!(z-1)^n} \quad (11)$$

en que $B_n(z)$ es un polinomio de grado $n-1$.

5. Demuestre que los polinomios $B_n(z)$, obtenidos en el punto anterior, satisfacen la relación

$$\frac{B_n(z)}{n!} = \sum_{\ell=1}^n \frac{(z-1)^{\ell-1}}{\ell!} \frac{B_{n-\ell}(z)}{(n-\ell)!} \quad (12)$$