Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2010
Tarea #1: Álgebra Lineal

Problema 1.1 (Mínimos cuadrados recursivo) *Suponga que se tiene disponible n pares de datos de entrada/salida de un sistema* $\{(u_t, y_t)\}_{t=1,\ldots,N}$*. Se ajusta un modelo de regresión lineal*

$$y_t = m\,u_t + b \tag{1}$$

mediante mínimos cuadrados, obteniendo las estimación $[\hat{m}_N, \hat{b}_N]$*.*

- *Determine la estimador recursivo mediante mínimos cuadrados* $\hat{m}_{N+1}$ *y* $\hat{b}_{N+1}$ *cuando llega un nuevo dato* (u_{N+1}, y_{N+1}) *en función de la estimación anterior* $[\hat{m}_N, \hat{b}_N]$*.*
- *Desarrolle una simulación, generando datos contaminados con ruido blanco aditivo* n_t *de medio cero, es decir, usando el modelo*
  $$y_t = m\,u_t + b + n_t \tag{2}$$
  y verifique que el estimador recursivo obtenido en el punto anterior $[\hat{m}_N, \hat{b}_N]$ *tiende a los parámetros verdaderos* $[m, b]$*, a medida que se aumenta el número de datos N.*

Problema 1.2 (Transformada de Fourier discreta) *Dada una secuencia discreta* $\{y_0, \ldots, y_{N-1}\}$*, la transformada de Fourier discreta se define como*

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_d : \mathbb{R}^N &\quad\mapsto\quad \mathbb{C}^N \\ y_k &\quad\mapsto\quad Y_\ell = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} y_k (z_\ell)^{-k} \end{aligned} \tag{3}$$

donde $z_\ell = e^{j\frac{2\pi}{N}\ell}$*,* $\ell = 0, \ldots, N-1$.

- *Demuestre que dicha transformación es lineal y determine la matriz* M_F *asociada a la transformación.*
- *¿Qué propiedades satisface la matriz de transformación* M_F*? (simétrica, ortogonal, unitaria, hermitiana, etc...)*
- *Determine la matriz de transformación inversa.*
- *Determine los cuatro subespacios asociados a la transformación (espacio fila, columna, nulo y nulo izquierdo). En particular, discuta si* $\mathbb{C}^N$ *debe ser considerado como un espacio vectorial complejo de dimensión N o real de dimensión* $2N$*.*

Problema 1.3 *Considere el sistema de ecuaciones*

$$Ax = b \tag{4}$$

en que A es una matriz alta*, es decir, con más filas que columnas. Dicha matriz* ***no*** *necesariamente es de rango columna completo.*

- *Utilizando descomposición en valores singulares, determine la solucion aproximada* $\hat{x}$ *del sistema mediante mínimos cuadrados:*
  $$\hat{x} = \operatorname{Arg\,mín} \|Ax - b\|^2 \tag{5}$$

Problema 1.4 (OPCIONAL) *Considere el sistema descrito en variables de estado:*

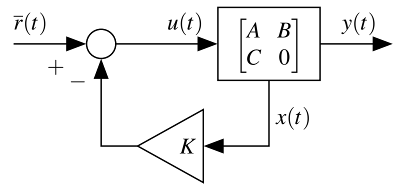
$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{6}$$
$$y = Cx \tag{7}$$

en que $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$, *A, B, y C tienen dimensiones adecuadas y el estado inicial es* $x(0) = x_o$

- **(Realimentación del estado)** Se aplica la ley de control

  $$u(t) = \bar{r}(t) - Kx(t) \tag{8}$$

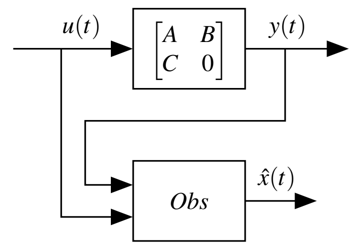
  Determine los polos de lazo cerrado y bajo qué condiciones sobre la matriz de ganancia de realimentación K dicho lazo es estable.



- **(Estimación de estado)** Si se utiliza un *observador* para estimar el estado de la forma

  $$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + J(y - C\hat{x}) \tag{9}$$

  Determine una ecuación diferencial para el error de estimación $e = x - \hat{x}$y bajo qué condiciones sobre la matriz de ganancia del observador J dicho error converge a cero (pues, en general, $(\hat{x}_o(0) \neq x_o)$.



- **(Realimentación del estado observado)** Si se utiliza el observador para cerrar el lazo de control, es decir, se aplica la ley de control

  $$u(t) = \bar{r}(t) - K\hat{x}(t) \tag{10}$$

  en que $\hat{x}$ está dado por (9):

  Determine un modelo de estado para el sistema de control realimentado completo y los polos de lazo cerrado.