Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2010
Tarea #2: Variable Compleja

Problema 2.1 *Determine en qué puntos $z \in \mathbb{C}$ cada una de las siguientes funciones es (i) continua, (ii) diferenciable, y (iii) analítica:*

1. $f(z) = \overline{z^2} = (z^2)^*$
2. $f(z) = \log(z)$ *definida en la rama principal en que* $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$.
3. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^n z^{-k}$, *en que* $n \in \mathbb{Z}$.

Problema 2.2 (Transformadas de Laplace y de Fourier) *Considere una señal $f(t) = e^{\alpha t}$ en que $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$.*

- *Determine la transformada de Laplace de $F_L(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y en qué puntos del plano dicha función es analítica.*
- *Si se define la función compleja $\tilde{F}(j\omega) = F_L(j\omega)$, determine la transformada de Fourier inversa $\tilde{f}(t) = \mathscr{F}^{-1}\{\tilde{F}(j\omega)\}$ usando el teorema de los residuos.*
- *Grafique $f(t)$ y $\tilde{f}(t)$, interprete y discuta los resultados obtenidos, etc.*
- *Haga un análisis similar para el caso de tiempo discreto, es decir, en que se considera una secuencia $f[k] = \alpha^k$ ($k \in \mathbb{Z}$), su transformada Zeta $F(z)$, la función compleja $\tilde{F}(e^{j\theta}) = F(e^{j\theta})$ ($-\pi < \theta \leq \pi$), y su transformada de Fourier de tiempo discreto inversa $\tilde{f}[k]$.*

Problema 2.3 (Integral de Bode en tiempo discreto) *Considere una transferencia de lazo abierto de tiempo discreto $L(z)$, racional y estrictamente propia, con polos inestables $\{p_1, \ldots, p_n\}$ y la función de sensibilidad asociada $S(z) = 1/(1+L(z))$, estable. Demuestre que*

$$\int_0^{\pi} \log|S(e^{j\theta})| d\theta = \pi \sum_{i=1}^{n} \log|p_i| \tag{1}$$

JYE – 30 de septiembre de 2010