

Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2010

Tarea #3: Espacios normados y de Banach.

Problema 3.1 Sea A un subconjunto de un espacio vectorial X . El conjunto A se dice **convexo** si, para todo par de elementos $x, y \in A$ el intervalo

$$I = \{z \in A : z = \alpha x + (1 - \alpha)y \text{ en que } 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

está contenido en A .

- Demuestre que la bola cerrada

$$\tilde{B}(0; 1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

en el espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es **convexa**, para toda norma $\|\cdot\|$.

Problema 3.2 Considere el espacio $X = C_{[0,1]}$, es decir, el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ con la norma

$$\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

Considere además el espacio Y como el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$, pero con la norma

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt$$

- Demuestre que ambos espacios, X e Y , son normados.
 - Demuestre que X es Banach, es decir, que las sucesiones de Cauchy convergen y que la convergencia al límite es **uniforme** en $t \in [0, 1]$.
 - Pruebe que Y no es completo.
 - Demuestre que $C_{[0,1]} \subset \mathcal{L}_{[0,1]}^1$, en que $\mathcal{L}_{[0,1]}^1$ es el espacio Y completado, es decir, el espacio de las funciones absolutamente integrables en $[0, 1]$.
-

Problema 3.3 Sea X el espacio normado de todos los polinomios definidos en el intervalo $B = [0, 1]$, con la norma $\|f(x)\| = \max_{x \in B} |f(x)|$. Considere los operadores de $X \rightarrow X$ definidos como

$$T_1 f = \frac{df}{dx}$$
$$T_2 f = \int_0^x f(\xi) d\xi \quad , x \in [0, 1]$$

- Determine si los operadores son (i) lineales, (ii) acotados, (iii) continuos y (iv) su norma.