Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2010
Tarea #4: Espacios con producto interno y de Hilbert

Problema 4.1 *Sea $M \neq \phi$ un subconjunto arbitrario, pero cerrado y convexo, de un espacio de Hilbert H. Demuestre que existe un único elemento en M de mínima norma.*

Problema 4.2 *Considere un sistema con función de transferencia* $H(s) = \dfrac{-0{,}5s+1}{s^2+s+1}$

Se desea aproximar este sistema por un modelo nominal de primer orden $H_o(s) = \dfrac{K}{\tau s+1} \in \mathscr{H}_2$

- *Determine el modelo nominal óptimo (es decir, sus parámetros K, τ) tales que*

  1. *Se minimiza la norma-2 de la diferencia entre las respuesta a escalón $g(t)$ del sistema $H(s)$ y la respuesta a escalón $g_o(t)$ del modelo nominal $H_o(s)$, es decir,*

  $$(K_1, \tau_1) = \operatorname{Arg}\min_{K,\tau} \|g(t) - g_o(t)\|_2^2$$

  2. *Se minimiza la norma-2 de la diferencia entre las funciones de transferencia, es decir,*

  $$(K_2, \tau_2) = \operatorname{Arg}\min_{K,\tau} \|H(s) - H_o(s)\|_2^2$$

  3. *Se minimiza la norma-2 de la diferencia ponderada entre las funciones de transferencia, es decir,*

  $$(K_3, \tau_3) = \operatorname{Arg}\min_{K,\tau} \left\| \frac{H(s) - H_o(s)}{s} \right\|_2^2$$

- *Haga gráficos que ilustren sus resultados (respuesta a escalón, diagramas de Bode, etc...) y que permitan comparar los tres casos anteriores.*
- *Discuta e interprete los resultados obtenidos.*

Problema 4.3 *Sea H el espacio de matrices reales de $m \times n$ con la suma y el producto matriciales usuales, y el producto interno*

$$\langle A, B \rangle = \text{traza}(A^T Q B)$$

en que Q es una matriz simétrica definida positiva. Demuestre que H es un espacio de Hilbert.

JYE – 9 de noviembre de 2010