Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2011
Examen

Problema 1 *Un subconjunto S de un espacio vectorial V es* **convexo** *si y sólo si, para todo par de elementos $v_1, v_2 \in S$, todos los vectores de la forma $v = \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2$, en que $0 \leq \alpha \leq 1$, pertenecen al conjunto S.*

Sean P y Q dos subconjuntos convexos de V. Demuestre que

1. *$P \oplus Q$ es convexo (suma directa de P y Q).*
2. *$P \cup Q$, en general, no es convexo.*

Problema 2 *Sea $F(z) = \dfrac{z}{z-a}$, tal que $|a| \neq 1$ y $\Phi(z) = F(z)F(z^{-1})$. Usando el teorema del residuo, determine $r[k] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(e^{j\theta})e^{j\theta k}d\theta$, en que $k \in \mathbb{Z}$.*

Problema 3 *Considere la función definida en toda la recta real por*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & ; x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & ; x \notin [0, 1) \end{cases}$$

Considere el conjunto de funciones que se obtiene por escalamientos y traslaciones de dicha función: $S = \{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)\}$, en que $j, k \in \mathbb{Z}$. Note, por ejemplo, que $\phi(x) = \phi_{0,0}(x)$.

Demuestre que S es un conjunto ortonormal en el espacio $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$.

Problema 4 *Considere el intervalo $[a, b]$ de la recta real, la función $K = K(x, y) : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en ambas componentes, y el operador integral definido por*

$$\begin{aligned} T : C[a,b] &\longrightarrow C[a,b] \\ f = f(x) &\longrightarrow T\,f = (T\,f)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy \end{aligned}$$

en que $C[a, b]$ es el espacio de las funciones continuas definidas en $[a, b]$.

1. *Demuestre que T es lineal.*
2. *Determine el operador adjunto asociado a T (considerando el producto interno usual en $C[a, b]$)*
   ¿Bajo qué condiciones sobre K el operador T es auto-adjunto?

Problema 5 *Considere el sistema definido por*

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bu(t) \qquad ; b \neq 0$$

con condición inicial $y(0) = y_o$, y el funcional de costo a minimizar

$$J = \int_0^T t\left[q\,y^2(t) + r\,u^2(t)\right]dt$$

con condición final $y(T) = 0$.

Determine qué condición debe satisfacer la trayectoria $y = y^*$ óptima que minimiza el funcional J.

JYE – 5 de enero de 2012