

Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2010

Tarea #0

Problema 0.1 Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $a < b$ y el intervalo $I = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

- Determine si el intervalo I es un conjunto abierto o cerrado.
- Determine la frontera y la clausura del intervalo I .
- Determine (si existe) el mínimo, el máximo, el ínfimo y el supremo del intervalo I .

Problema 0.2 Sea $n \in \mathbb{N}$ y $R_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (|x|^n + |y|^n)^{1/n} = 1\}$.

- Haga un diagrama de R_n para $n = 1$, $n = 2$ y cuando $n \rightarrow \infty$.

Problema 0.3 Dado el sistema de ecuaciones

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad (2)$$

$$a_3x + b_3y = c_3 \quad (3)$$

en que $a_\ell, b_\ell, c_\ell \in \mathbb{R}$, para $\ell \in \{1, 2, 3\}$.

- Determine bajo qué condiciones el sistema tiene solución única, infinitas soluciones, o no tiene solución. ¿Cómo es posible interpretar dichas condiciones geoméricamente?

Problema 0.4 Sea $z = z(t) \in \mathbb{C}$ y $x = \operatorname{Re}\{z\}$ e $y = \operatorname{Im}\{z\}$. Considere la función $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, tal que $f(z) = 1/z$.

- Determine $\frac{df}{dz}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{df}{dt}$.
- Determine y haga un diagrama de la imagen bajo la función f de la curva $\zeta = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$.

Problema 0.5 Sea $f(t) = e^{-\alpha t} \mu(t)$ en que $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mu(t)$ es el escalón unitario o función de Heaviside.

- Determine para qué valores de α la transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe y cuál es su región de convergencia (es decir, para qué valores de $s \in \mathbb{C}$ el par transformada y transformada inversa está bien definido).
- Determine para qué valores de α la transformada de Fourier $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ existe ¿Existe una región de convergencia para dicha transformada?

Problema 0.6 Sea $x(t) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned} x(t) &= T \langle x_o, u(t) \rangle \\ &= e^{A(t-t_o)} x_o + \int_{t_o}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4)$$

en que $t \geq t_o$, $x_o \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$.

- Demuestre que $T \langle \cdot, \cdot \rangle$ es un operador lineal en ambas componentes.
- Demuestre que $x(t)$ definido en (4) es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad ; x(t_o) = x_o \quad (5)$$

Problema 0.7 Considere los siguientes tres vectores en \mathbb{R}^3 :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

- Demuestre que los vectores dados son linealmente independientes.
 - Dado un vector $v = [\alpha, \beta, \gamma]^T \in \mathbb{R}^3$, determine su expresión como combinación lineal de los vectores dados ¿Forman $\{v_1, v_2, v_3\}$ un base para \mathbb{R}^3 ?
 - Determine si los vectores dados son ortogonales entre si.
 - A partir de los vectores dados, determine una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, usando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.
 - Determine la matriz de transformación de la representación en términos de la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ a la representación en términos de la base \mathcal{B} .
-

Problema 0.8 Los polinomios de Euler-Fröbenius aparecen en modelos muestreados de sistemas lineales invariantes en el tiempo:

$$B_n(z) = b_1^n z^{n-1} + b_2^n z^{n-2} + \dots + b_{n-1}^n z + b_n^n \quad (7)$$

$$b_k^n = \sum_{\ell=1}^k (-1)^{k-\ell} \ell^n \binom{n+1}{k-\ell} \quad (8)$$

en que $n \in \mathbb{N}$

- Determine explícitamente $B_1(z)$, $B_2(z)$ y $B_3(z)$.
- Demuestre que
 1. $b_1^n = b_n^n = 1$
 2. $b_k^n = k b_k^{n-1} + (n-k+1) b_{k-1}^{n-1}$ (cálculo recursivo de los coeficientes)
 3. $b_k^n = b_{n+1-k}^n$ (simetría de los coeficientes)
 4. $B_n(z_0) = 0 \iff B_n(1/z_0) = 0$ (simetría de las raíces)
 5. $B_{n+1}(z) = z(1-z)B_n'(z) + (nz+1)B_n(z)$ en que $B_n'(z) = \frac{dB_n(z)}{dz}$ (cálculo recursivo de los polinomios)