Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2011
Tarea #1.

Problema 1.1 *Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por*

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + jx_2 \\ x_1 - jx_2 \end{bmatrix}$$

Determine la matriz asociada a la transformación T y sus cuatro subespacios fundamentales.

Problema 1.2 *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Demuestre que A^TA es invertible si y sólo si A tiene rango columna completo.*

Problema 1.3 *Sea $\mathscr{V}$ un espacio vectorial y $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ un subconjunto l.i. de dicho espacio. Determine bajo qué condiciones un vector $v \in \mathscr{V}$ puede escribirse como la suma de sus proyecciones sobre los elementos de S, es decir,*

$$v = \operatorname{proy}_{s_1} v + \ldots + \operatorname{proy}_{s_k} v$$

Problema 1.4 *Considere el espacio vectorial $\mathscr{V}$ de las secuencias reales de largo N, es decir, $x = \{x[k]\}_{k=0,\ldots,N-1}$. En dicho espacio considere el (sub)conjunto $\mathscr{S} = \{s_\ell[k]\}_{\ell=0,\ldots,N-1}$, en que $s_\ell[k] = \cos(\frac{2\pi}{N}k\ell)$*

1. *Determine si $\mathscr{S}$ es un conjunto l.i. y ortogonal bajo el producto interno*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[k]$$

2. *Determine el espacio generado por $\mathscr{S}$ (es decir, el* span *de $\mathscr{S}$).*
3. *Determine $\mathscr{S}^\perp$ y una base ortogonal para dicho espacio.*
4. *Sea $T : \mathscr{V} \to \mathbb{R}^N$ una transformación definida por*

$$T(x) = [C_1, C_2, \ldots, C_N]^T$$

en que

$$C_\ell = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos(\tfrac{2\pi}{N}k\ell)$$

Determine la matriz asociada a la transformación y el espacio nulo de dicha matriz.

Sugerencia: *Revise la serie de Fourier trigonométrica de tiempo discreto.*

Problema 1.5 *Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$, en que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ son* ***dados****, y la incógnita es el vector $x \in \mathbb{R}^n$.*

1. *Si $n < m$ el sistema se dice* sobre-determinado. *Demuestre que, si A es de rango columna completo, la solución mediante mínimos cuadrados es*

$$x_{LS} = \operatorname{Arg} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 = (A^TA)^{-1}A^Tb$$

2. *Si $n > m$ el sistema se dice* sub-determinado *y existen, en general, infinitas soluciones. En este caso se utiliza algún* criterio *para elegir la mejor solución. Para ilustrar esta idea, proponga un ejemplo en que $n = 2$ y $m = 1$, y determine la solución de $Ax = b$ tal que*

   a) *Se minimiza $\|x\|_1 = \sum |x_i|$*
   b) *Se minimiza $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$*
   c) *Se minimiza $\|x\|_\infty = \lim_{n\to\infty}(\sum |x_i|^n)^{1/n} = \max_i\{|x_i|\}$*

   Interprete geométricamente en $\mathbb{R}^2$.

JYE – 25 de octubre de 2011