Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2012
Examen Final

Problema 1 *Sea $\mathscr{RH}_2$ el espacio de las funciones de transferencia de tiempo discreto, racionales, estrictamente propias y estables (es decir, con grado relativo mayor que cero y polos dentro del círculo unitario). Considere el conjunto*

$$V = \left\{ \frac{1-a_1}{z-a_1}, \frac{1-a_2}{z-a_2}, \frac{1-a_3}{z-a_3} \right\} \subset \mathscr{RH}_2$$

en que $\{a_n\}_{n=1,2,3}$ son números reales diferentes.

- *Determine una base ortonormal para el espacio generado por V. El producto interno es el* usual*, es decir:*

$$\langle F(z), G(z) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\theta}) \overline{G(e^{j\theta})} d\theta$$

Problema 2 *Considere el sistema de tiempo continuo definido en variables de estado:*

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \qquad ; x(0) = x_o \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{2}$$

en que la entrada $u \in \mathscr{L}^2_{[0,t_f]}(\mathbb{R}^q)$, el estado inicial $x_o \in \mathbb{R}^n$, y las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$, y $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

- *Determine explícitamente el operador*

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^n \times \mathscr{L}^2_{[0,t_f]}(\mathbb{R}^q) &\to \mathscr{L}^2_{[0,t_f]}(\mathbb{R}^p) \\ (x_0, u) &\to y = G(x_o, u) \end{aligned}$$

- *Determine (explícitamente) el operador adjunto de G, es decir, G^*, considerando los productos internos usuales en $\mathbb{R}^n$ y $\mathscr{L}^2$*

Problema 3 *Dado el sistema lineal con una entrada y una salida*

$$\dot{y}(t) = -y(t) + u(t) \qquad ; y(0) = y_o \neq 0$$

en que $u(t)$ es la entrada e $y(t)$ es la salida, considere el funcional cuadrático

$$I(u) = \int_0^{t_f} \left[y(t)^2 + u(t)^2 \right] dt \tag{3}$$

- *Usando principios* variacionales *determine qué condición(es) debe satisfacer la señal de entrada óptima $u = u^*$ y la salida óptima $y = y*$, tal que el funcional I sea **mínimo**.*
- *Si es posible, obtenga dichas señales/funciones minimizantes.*

Problema 4 *Dado un conjunto de puntos $\{(x_k, y_k)\}_{k=1,\ldots,N} \subset \mathbb{R}^2$ determine cómo se podría resolver cada uno de los siguientes problemas:*

- *¿Cual es la recta $y = mx + b$ tal que la suma de los errores en el eje y entre la recta y los puntos es mínima?*
- *¿Cual es la recta $y = mx + b$ tal que la suma de las distancias entre la recta y cada uno de los puntos es mínima?*

JYE – 12 de diciembre de 2012