

Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2012

Tarea #1.

Problema 1.1 (Una demostración) Los polinomios de Euler-Fröbenius aparecen en modelos muestreados de sistemas lineales invariantes en el tiempo:

$$B_n(z) = b_1^n z^{n-1} + b_2^n z^{n-2} + \dots + b_{n-1}^n z + b_n^n$$

$$b_k^n = \sum_{\ell=1}^k (-1)^{k-\ell} \ell^n \binom{n+1}{k-\ell}$$

en que $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que

1. $b_1^n = b_n^n = 1$
2. $b_k^n = k b_k^{n-1} + (n-k+1) b_{k-1}^{n-1}$ (calculo recursivo de los coeficientes)
3. $b_k^n = b_{n+1-k}^n$ (simetría de los coeficientes)
4. $B_n(z_o) = 0 \iff B_n(1/z_o) = 0$ (simetría de las raíces)
5. $B_{n+1}(z) = z(1-z)B_n'(z) + (nz+1)B_n(z)$ en que $B_n'(z) = \frac{dB_n(z)}{dz}$ (calculo recursivo de los polinomios)

Problema 1.2 (Laplace y Fourier) Considere la señal $f(t) = e^{\alpha t}$, $t \in \mathbb{R}$ en que $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante.

1. Determine la transformada de Laplace de $f(t)$, $F(s)$ y su región de convergencia en el plano $s \in \mathbb{C}$.
2. Determine la transformada de Laplace inversa de $F(s)$ y compare con la señal $f(t)$ original.
3. Si se define $G(s)$ como la extensión de $F(s)$ a todo el plano complejo, es decir, $G(s) = F(s), \forall s \in \mathbb{C}$, entonces determine la transformada de Fourier inversa de $G(s)$, es decir, una señal $g(t)$.
4. Discuta los resultados obtenidos y determine bajo qué condiciones $f(t) = g(t)$.

Problema 1.3 (Estabilidad y causalidad) Considere el conjunto \mathcal{H} de las funciones $H(z)$ racionales y con coeficientes reales de una variable compleja $z \in \mathbb{C}$. Se define el producto:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(H_1(z), H_2(z)) \longrightarrow \langle H_1(z), H_2(z) \rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H_1(z) H_2(z^{-1}) z^{-1} dz$$

1. Demuestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en \mathcal{H} , es decir, que $\forall H_1(z), H_2(z), H_3(z) \in \mathcal{H}$:
 - a) $\langle H_1(z) + H_2(z), H_3(z) \rangle = \langle H_1(z), H_3(z) \rangle + \langle H_2(z), H_3(z) \rangle$,
 - b) $\langle \alpha H_1(z), H_2(z) \rangle = \alpha \langle H_1(z), H_2(z) \rangle$,
 - c) $\langle H_1(z), H_2(z) \rangle = \overline{\langle H_2(z), H_1(z) \rangle}$ (complejo conjugado)
 - d) $\|H_1(z)\|^2 = \langle H_1(z), H_1(z) \rangle \geq 0$
 - e) $\|H_1(z)\|^2 = \langle H_1(z), H_1(z) \rangle = 0 \iff H_1(z) = 0$
2. Sean $h_1[k] = a^{-k}$ y $h_2[k] = a^k$ en que $0 < a < 1$. Determine la transformada Zeta de cada secuencia, es decir, $H_1(z)$ y $H_2(z)$, y su región de convergencia.
3. Determine $\|H_1(z)\|$, $\|H_2(z)\|$, y $\langle H_1(z), H_2(z) \rangle$

4. Si se definen $G_1(z)$ y $G_2(z)$ como las extensiones de las transformadas anteriores a todo el plano complejo, determine su transformada de Fourier de tiempo discreto inversa, es decir

$$g_\ell[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_\ell(e^{j\theta}) e^{jk\theta} d\theta \quad \ell = 1, 2$$

y compárelas con las secuencias originales $h_\ell[k]$ respectivas.

5. Qué relación se puede establecer entre el producto $\langle G_1(z), G_2(z) \rangle$ y el teorema de Parseval para secuencias, es decir,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_1[k]g_2[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_1(e^{j\theta})G_2(e^{-j\theta})d\theta$$

6. Interprete los resultados anteriores en términos de estabilidad y causalidad de sistemas y su función de transferencia.