

Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2012

Tarea #2.

Problema 1.1 Sea \mathcal{V} un espacio vectorial de dimensión $n < \infty$ y $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ un subconjunto l.i. de dicho espacio. Dado un vector $v \in \mathcal{V}$, determine bajo qué condiciones la proyección de v sobre el (sub)espacio generado por S es igual a la suma de sus proyecciones sobre los elementos de S , es decir,

$$\text{proy}_{\text{Span}S} v = \text{proy}_{s_1} v + \dots + \text{proy}_{s_k} v$$

Problema 1.2 Considere la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, tal que $A = A^H$. Demuestre que:

1. Sus autovalores son reales
2. Sus autovectores son ortogonales y l.i.
3. Si $\{v_i\}$ son los autovectores de A normalizados ($v_i^H v_i = 1$) y λ_i los correspondientes autovalores, entonces:

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^H$$

Problema 1.3 Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI) de tiempo discreto:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad ; \quad x(0) = x_o \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (2)$$

en que $k \in \mathbb{Z}_0^+$, el estado es $x(k) \in \mathbb{R}^n$, la entrada es $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$, la salida es $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$, y las matrices son $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B, C^T \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$. En particular, considere el caso en que:

$$A = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,8 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0,6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad (3)$$

1. Determine la función de transferencia del sistema.
2. Se define el **subespacio estable** del sistema al conjunto de vectores x_o (la condición inicial) tal que, cuando $u(k) = 0$, el estado $x(k)$ tiende a 0, cuando $k \rightarrow \infty$. Determine el **subespacio estable** del sistema dado por (1)-(3).
3. Se define el **subespacio controlable** del sistema como el conjunto de vectores x_o tal que existe una secuencia de control $\{u(0), \dots, u(N-1)\}$ que puede llevar el estado a cero en un horizonte finito N , es decir $x(N) = 0$, para algún $0 < N < \infty$. Determine el **subespacio controlable** del sistema dado por (1)-(3).
4. Se define el **subespacio observable** del sistema como el conjunto de vectores x_o que puede ser *reconstruido* perfectamente a partir de una secuencia finita de salida $\{y(0), \dots, y(N)\}$, cuando $u(k) = 0$, para algún $0 < N < \infty$. Determine el **subespacio observable** del sistema dado por (1)-(3).
5. Determine los 4 subespacios de la descomposición canónica de Kalman:
 - a) observable y controlable,
 - b) observable pero no controlable,
 - c) controlable, pero no observable, y
 - d) no observable y no controlable.

Fundamente claramente los resultados que utilice. Se sugiere revisar las referencias

- Kwakernaak, H., Sivan, R. (1972). Linear optimal control system.
- M.E. Salgado, J.I. Yuz and R.A. Rojas. Análisis de Sistemas Lineales. Pearson, España, 2005
<http://profesores.elo.utfsm.cl/~jyuz/ASL.html>
- G.C. Goodwin, M.E. Salgado and S. Graebe. Control System Design. Prentice-Hall, 2001