

# Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2012

## Tarea #4.

---

**Problema 4.1** Considere el sistema de tiempo continuo definido en variables de estado:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad ; x(0) = x_o \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

en que la entrada  $u \in \mathcal{L}^2_{[0,t_f]}(\mathbb{R}^q)$ , el estado inicial  $x_o \in \mathbb{R}^n$ , y las matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ , y  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ .

- Demuestre que el estado  $x \in \mathcal{L}^2_{[0,t_f]}(\mathbb{R}^n)$  y determine explícitamente el operador

$$T_1 : \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}^2_{[0,t_f]}(\mathbb{R}^q) \rightarrow \mathcal{L}^2_{[0,t_f]}(\mathbb{R}^n) \\ (x_o, u) \rightarrow x = T_1(x_o, u)$$

- Demuestre que la salida  $y \in \mathcal{L}^2_{[0,t_f]}(\mathbb{R}^p)$  y determine explícitamente el operador

$$T_2 : \mathcal{L}^2_{[0,t_f]}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}^2_{[0,t_f]}(\mathbb{R}^p) \\ x \rightarrow y = T_2 x$$

- Determine (explícitamente) el operador  $G = T_2 T_1$
  - Determine (explícitamente) el operador adjunto de  $G$ , es decir,  $G^*$ , considerando los productos internos usuales en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{L}^2$
- 

**Problema 4.2** Considere el funcional cuadrático

$$I(u, x) = \int_0^{t_f} [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] + x(t_f)^T P x(t_f) \quad (3)$$

en que  $u$  y  $x$  corresponden a la entrada y al estado del sistema (1)-(2) y las matrices  $Q \geq 0$ ,  $R > 0$  y  $P \geq 0$  (y tienen las dimensiones adecuadas).

- Usando principios variacionales determine qué condición debe satisfacer la señal de control óptima  $u = u^*$  y la trayectoria de estado óptima  $x = x^*$ , tal que minimizan el funcional  $I$ .
- 

**Problema 4.3** En el plano  $XY$ , considere las dos ramas de la hipérbola definidas por  $xy = 1$ . Determine la curva de menor longitud que une un punto de la rama en el cuadrante I con un punto de la rama en el cuadrante III.