Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2013
Examen

Problema 1 (20 puntos) *Considere los siguientes conjuntos:*

H*: espacios de Hilbert,*	M*: espacios métricos,*
B*: espacios de Banach,*	N*: espacios normados,*
C*: espacios completos,*	P*: espacios con producto interno,*
T*: espacios topológicos,*	V*: espacios vectoriales.*

- *Haga un diagrama indicando la contención o intersección de dichos conjuntos (es decir, un diagrama de Venn), fundamentando claramente su respuesta.*

Problema 2 (20 puntos) *Sea $\mathscr{W}$ un espacio vectorial con producto interno y $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathscr{W}$ un conjunto ortogonal dentro de él.*

- *Demuestre que V es un conjunto linealmente independiente.*

Problema 3 (20 puntos) *Sean*

$$G_1(s) = \frac{1}{s+p_1} \qquad G_2(s) = \frac{K(s+c)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

funciones de transferencia en la variable $s \in \mathbb{C}$, en que K, p_1, p_2 y c son números reales.

- *Determine la mejor aproximación de G_2 en el $\operatorname{span}\{G_1\}$ en términos de la norma inducida por el producto interno usual en $\mathscr{L}_2(j\mathbb{R})$, es decir:*

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) G(-j\omega) d\omega$$

Problema 4 (20 puntos) *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ espacios normados, y sea $\mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ el espacio vectorial de todos los operadores lineales de $\mathscr{X}$ a $\mathscr{Y}$.*

- *Demuestre que*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) &\to \mathbb{R} \\ T &\to \|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_{\mathscr{Y}}}{\|x\|_{\mathscr{X}}} \end{aligned}$$

  *es una **norma** en $\mathscr{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, en que $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ y $\|\cdot\|_{\mathscr{Y}}$ son las normas de $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$, respectivamente.*

Problema 5 (20 puntos, OPCIONAL) *Considere en $\mathbb{R}^n$ dos conjuntos A y B cerrados, convexos y disjuntos entre ellos (es decir, $A \cap B = \emptyset$).*

- *Demuestre que siempre existe un* hiperplano separador

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b\}$$

talque $a^T x < b$ para todo $x \in A$, y $a^T x > b$ para todo $x \in B$.

Sugerencia: i) *Haga un diagrama de la situación en $\mathbb{R}^2$,* ii) *Construya el segmento de recta entre el punto de A mas cercano al conjunto B, y el punto de B mas cercano al conjunto A, y* iii) *Considere una recta perpendicular a dicho segmento... ¡Ahora generalice!*

Problema 6 (20 puntos, OPCIONAL) *Dada una superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | F(x,y,z) = 0\}$ y dos puntos sobre ella $p_1 = (x_1, y_1, z_1) \in S$ y $p_2 = (x_2, y_2, z_2) \in S$*

- *Determine el funcional a minimizar para determinar la curva de mínima longitud $\gamma_{\text{mín}}$* ***sobre la curva*** *S que une p_1 con p_2.*
- *Si S es el hiperboloide parabólico $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z = 0$, y los puntos dados son $p_1 = (1,1,0)$ y $p_2 = (-1,1,0)$, determine explícitamente dicha curva $\gamma_{\text{mín}}$ y su longitud.*

Problema 7 (20 puntos, OPCIONAL) *Considere el sistema de ecuaciones $Ax = c$ en que*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

en que todos los coeficientes son números reales. Suponga $c \notin C(A)$ (el espacio columna de A) y que $\text{rango}(A) = 2$.

- *¿Es posible interpretar geométricamente la solución obtenida por mínimos cuadrados*

$$x_{LS} = \text{Arg}\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - c\|_2$$

en el plano $x_1 - x_2$ al que pertenecen las tres rectas en (1)?