

IPD410 - Métodos Matemáticos en Control Automático – 2S 2013
Tarea #1. Variable Compleja (Parte 2)

Problema 1.1 (Laplace y Fourier) Considere la señal $f(t) = e^{\alpha t}$, $t \in \mathbb{R}$ en que $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante.

1. Determine la transformada de Laplace de $f(t)$, $F(s)$ y su región de convergencia en el plano $s \in \mathbb{C}$.
 2. Determine la transformada de Laplace inversa de $F(s)$, es decir, $\tilde{f}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, y compárela con la señal $f(t)$ original.
 3. Si se define $G(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$, entonces determine la transformada de Fourier inversa de $G(j\omega)$, es decir, una señal $g(t)$.
 4. Discuta los resultados obtenidos y qué relación existe entre $f(t)$, $\tilde{f}(t)$ y $g(t)$.
-

Problema 1.2 (Estabilidad y causalidad) Considere el conjunto \mathcal{H} de las funciones $H(z)$ racionales y con coeficientes reales de una variable compleja $z \in \mathbb{C}$. Se define el producto interno como:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(H_1(z), H_2(z)) \longrightarrow \langle H_1(z), H_2(z) \rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H_1(z)H_2(z^{-1})z^{-1} dz$$

1. Sean $h_1[k] = a^{-k}$ y $h_2[k] = a^k$ en que $0 < a < 1$. Determine la transformada \mathcal{Z} de cada secuencia, es decir, $H_1(z)$ y $H_2(z)$, y su región de convergencia.
2. Determine $\|H_1(z)\|^2 = \langle H_1(z), H_1(z) \rangle$, $\|H_2(z)\|^2 = \langle H_2(z), H_2(z) \rangle$, y $\langle H_1(z), H_2(z) \rangle$
3. Si se define $G_1(e^{j\theta}) = H_1(z)|_{z=e^{j\theta}}$ y $G_2(e^{j\theta}) = H_2(z)|_{z=e^{j\theta}}$, determine su transformada de Fourier de tiempo discreto inversa, es decir

$$g_\ell[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_\ell(e^{j\theta}) e^{jk\theta} d\theta \quad \ell = 1, 2$$

y compárelas con las secuencias originales $h_\ell[k]$ respectivas.

4. Qué relación se puede establecer entre el producto $\langle G_1(z), G_2(z) \rangle$ y el teorema de Parseval para secuencias, es decir,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_1[k]g_2[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_1(e^{j\theta})G_2(e^{-j\theta})d\theta$$

5. Interprete los resultados anteriores en términos de estabilidad y causalidad de sistemas y su función de transferencia.
-

Problema 1.3 (Criterio de estabilidad de Nyquist) El teorema de estabilidad de Nyquist [2, Teorema 5.1] establece que “Si una función de transferencia de lazo abierto $G_o(s)C(s)$ tiene P polos en el semi-plano derecho abierto y no tiene polos en el eje imaginario, entonces el lazo cerrado tiene Z polos en el semi-plano derecho abierto si, y sólo si, el diagrama polar de $G_o(s)C(s)$ encierra el punto $-1 + j0$ del plano complejo $N = Z - P$ veces en sentido negativo”.

Demuestre este teorema usando elementos de variable compleja. En particular, estudie el Principio del Argumento y el Teorema de Rouché [1] y relaciónelos con el Criterio de Nyquist.

Referencias

- [1] R. V. Churchill and J. W. Brown. *Complex Variables And Applications*. McGraw-hill, Englewood Cliffs, New Jersey, 8th edition, 2008.
- [2] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, New Jersey, 2001.