Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2013
Tarea #2.

Problema 2.1 *Sea $\mathscr{V}$ un espacio vectorial de dimensión $n < \infty$ y $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ un subconjunto l.i. de dicho espacio. Dado un vector $v \in \mathscr{V}$, determine bajo qué condiciones la proyección de v sobre el (sub)espacio generado por S es igual a la suma de sus proyecciones sobre los elementos de S, es decir,*

$$\operatorname{proy}_{\operatorname{Span} S} v = \operatorname{proy}_{s_1} v + \ldots + \operatorname{proy}_{s_k} v$$

Problema 2.2 *Considere la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de rango $r < \text{mín}\{m,n\}$y sea su descomposicion en valores singulares*

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_r & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}^T$$

*donde $\Sigma_r = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ **Demuestre** que:*

1. *Las columnas de U_1 definen una **base** para el espacio columna de A.*
2. *Las columnas de V_2 definen una **base** para el espacio nulo de A.*

Problema 2.3 *Dada una secuencia discreta $\{y_0, \ldots, y_{N-1}\}$, la transformada de Fourier discreta se define como*

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_d : \mathbb{R}^N &\mapsto \mathbb{C}^N \\ y_k &\mapsto Y_\ell = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} y_k (z_\ell)^{-k} \end{aligned} \tag{1}$$

donde $z_\ell = e^{j\frac{2\pi}{N}\ell}$, $\ell = 0, \ldots, N-1$.

- *Demuestre que dicha transformación es lineal y determine la matriz M_F asociada a la transformación.*
- *¿Qué propiedades satisface la matriz de transformación M_F? (simétrica, ortogonal, unitaria, hermitiana, etc...)*
- *Determine la matriz de transformación inversa.*
- *Determine los cuatro subespacios asociados a la transformación (espacio fila, columna, nulo y nulo izquierdo). En particular, discuta si $\mathbb{C}^N$ debe ser considerado como un espacio vectorial complejo de dimensión N o real de dimensión $2N$.*

JYE – 11 de noviembre de 2013