Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2014
Examen

Problema 1 (20 puntos) *Considere el conjunto*

$$X = \{f = f(x) : f \text{ es una función real y continua para } x \in [0,1]\}$$

Discuta si este conjunto puede ser considerado como un espacio topológico, normado, métrico, de Hilbert, de Banach, completo o vectorial, indicando claramente bajo qué condiciones.

Problema 2 (20 puntos) *Considere el conjunto de funciones*

$$S = \{e^{-t/2}, t\, e^{-t/2}, t^2\, e^{-t/2}\}$$

definidas en el intervalo $t \geq 0$.

Determine una base ortonormal para $X = \operatorname{span} S$*, bajo el producto interno*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(t)g(t)dt$$

Problema 3 (20 puntos) *Sea* $S_N = 1, z, z^2, \ldots, z^N$*, en que* $N \in \mathbb{N}$*, y* $X = \operatorname{span} S_N$*. Se define el siguiente operador*

$$\begin{aligned} T : X &\to X \\ f &\mapsto Tf = \frac{d}{dz} f \end{aligned}$$

a) *Encuentra una base para* X.

b) *Demuestre que el operador* T *es lineal.*

c) *Determine la matriz de transformación asociada al operador* T.

d) *Determine el espacio nulo de dicha matriz.*

Problema 4 (20 puntos) *Sea* $T : H_1 \to H_2$ *un operador lineal y acotado entre dos espacios de Hilbert* H_1 *y* H_2*. Se define*

$$\text{Rango de } T\text{: } \mathscr{R}(T) = \{y \in H_2 : \text{ existe } x \in H_1 \text{ talque } y = Tx\}$$
$$\text{Espacio nulo de } T\text{: } \mathscr{N}(T) = \{x \in H_1 : Tx = 0\}$$

a) *Demuestre que* $\mathscr{R}(T)$ *es un subespacio de* H_2 *y que* $\mathscr{N}(T)$ *es un subespacio de* H_1.

b) *Demuestre que* $\mathscr{N}(T^*)$ *es el complemento ortogonal de* $\mathscr{R}(T)$*, en que* T^* *es el operador adjunto de* T.

JYE – 15 de diciembre de 2014