IPD410 - Métodos Matemáticos en Control Automático – 2S 2014
Tarea #1. Variable Compleja

El objetivo de esta tarea es aplicar los conceptos y herramientas revisados en el capítulo de Variable Compleja.

Plazo de entrega: lunes 13 de octubre, 14:00hrs, a través de http://aula.usm.cl

---

1. Sea $k \in \mathbb{Z}$ y $f(z) = \dfrac{z^k(z+2)}{(z-1)}$ una función de la variable compleja $z \in \mathbb{C}$.

   a) Determine los puntos del plano complejo extendido en que $f(z)$ es analítica.

   b) Determine los residuos de $f(z)$ en sus polos y en $z = \infty$.

   c) Calcule la integral
   $$I = \oint_{\gamma_R} f(z)dz$$
   en que γ_R es un circulo de radio $R > 0$.

2. Sea $G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ una función racional en la variable $s \in \mathbb{C}$. Sea $H(s) = \log G(s)$ en que log es la rama principal de la función logaritmo compleja.

   a) Determine en qué puntos del plano complejo la función $H(s)$ es analítica.

   b) Determine $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \log|G(j\omega)|d\omega$.

   Sugerencia: revise la demostración del Teorema Integral de Bode, por ejemplo, en el libro Serón, M., Braslavsky, J. & Goodwin, G.C., 1997. Fundamental limitations in filtering and control, Springer Verlag.

3. Considere el conjunto $\mathscr{H}$ de las funciones $H(z)$ racionales y con coeficientes reales de una variable compleja $z \in \mathbb{C}$. Se define el producto interno como:
   $$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \quad & \mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (H_1(z), H_2(z)) & \longrightarrow \langle H_1(z), H_2(z) \rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H_1(z) H_2(z^{-1}) z^{-1} dz \end{aligned}$$
   Considere además las dos secuencias $h_1[k] = a^{-k}$ y $h_2[k] = a^k$ en que $0 < a < 1$ y $k \in \mathbb{Z}_0^+$ y sus respectivas transformadas $\mathscr{Z}$, es decir, $H_1(z)$ y $H_2(z)$.

a) Determine $H_1(z)$, $H_2(z)$ y sus respectivas regiones de convergencia.

b) Determine $\|H_1(z)\|^2 = \langle H_1(z), H_1(z)\rangle$, $\|H_2(z)\|^2 = \langle H_2(z), H_2(z)\rangle$, y $\langle H_1(z), H_2(z)\rangle$

c) Si se define $G_1(e^{j\theta}) = H_1(z)\big|_{z=e^{j\theta}}$ y $G_2(e^{j\theta}) = H_2(z)\big|_{z=e^{j\theta}}$, determine su transformada de Fourier de tiempo discreto inversa, es decir

$$g_\ell[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_\ell(e^{j\theta})e^{jk\theta}d\theta \qquad \ell = 1,2$$

y compárelas con las secuencias originales $h_\ell[k]$ respectivas.

d) Qué relación se puede establecer entre el producto $\langle G_1(z), G_2(z)\rangle$ y el teorema de Parseval para secuencias, es decir,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_1[k]g_2[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_1(e^{j\theta})G_2(e^{-j\theta})d\theta$$

e) Interprete los resultados anteriores en términos de estabilidad y causalidad de sistemas y su función de transferencia.

JYE – 25 de septiembre de 2014