

Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2014

Tarea #2.

Problema 2.1 Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Demuestre que $A^T A$ es invertible si y sólo si A tiene rango columna completo.

Problema 2.2 Sea \mathcal{V} un espacio vectorial de dimensión $n < \infty$ y $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ un subconjunto l.i. de dicho espacio. Dado un vector $v \in \mathcal{V}$, determine bajo qué condiciones la proyección de v sobre el (sub)espacio generado por S es igual a la suma de sus proyecciones sobre los elementos de S , es decir,

$$\text{proy}_{\text{Span} S} v = \text{proy}_{s_1} v + \dots + \text{proy}_{s_k} v$$

Problema 2.3 Dada una secuencia discreta $\{y_0, \dots, y_{N-1}\}$, la transformada de Fourier discreta se define como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d : \mathbb{R}^N &\mapsto \mathbb{C}^N \\ y_k &\mapsto Y_\ell = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} y_k (z_\ell)^{-k} \end{aligned} \quad (1)$$

donde $z_\ell = e^{j\frac{2\pi}{N}\ell}$, $\ell = 0, \dots, N-1$.

- Demuestre que dicha transformación es lineal y determine la matriz M_F asociada a la transformación.
- ¿Qué propiedades satisface la matriz de transformación M_F ? (simétrica, ortogonal, unitaria, hermitiana, etc...)
- Determine la matriz de transformación inversa.
- Determine los cuatro subespacios asociados a la transformación (espacio fila, columna, nulo y nulo izquierdo). En particular, discuta si \mathbb{C}^N debe ser considerado como un espacio vectorial complejo de dimensión N o real de dimensión $2N$.

Problema 2.4 Considere el sistema de ecuaciones $Ax = c$ en que

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

en que todos los coeficientes son números reales. Suponga $c \notin \mathcal{C}(A)$ (el espacio columna de A) y que $\text{rango}(A) = 2$.
¿Es posible interpretar geoméricamente la solución obtenida por mínimos cuadrados

$$x_{LS} = \text{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - c\|_2$$

en el plano $x_1 - x_2$ al que pertenecen las tres rectas definidas por $Ax = c$ y (2)?

Problema 2.5 Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$, en que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ son **dados**, y la incógnita es el vector $x \in \mathbb{R}^n$. Si $n > m$ el sistema se dice sub-determinado y existen, en general, infinitas soluciones. En este caso se utiliza algún criterio para elegir la **mejor** solución.

- Para ilustrar esta idea, proponga un ejemplo en que $n = 2$ y $m = 1$, y determine la solución de $Ax = b$ tal que
 1. Se minimiza $\|x\|_1 = \sum |x_i|$
 2. Se minimiza $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$
 3. Se minimiza $\|x\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum |x_i|^n)^{1/n} = \max_i \{|x_i|\}$
- Interprete geoméricamente en \mathbb{R}^2 .