

Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2014

Tarea #3: Espacios normados, Banach y Hilbert.

Problema 3.1 Sea A un subconjunto de un espacio vectorial X . El conjunto A se dice **convexo** si, para todo par de elementos $x, y \in A$ el intervalo

$$I = \{z \in A : z = \alpha x + (1 - \alpha)y \text{ en que } 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

está contenido en A .

Demuestre que la bola cerrada

$$\tilde{B}(0; 1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

en el espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es **convexa**.

Problema 3.2 Considere el espacio $X = C_{[0,1]}$, es decir, el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ con la norma

$$\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

Considere además el espacio Y como el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$, pero con la norma

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt$$

- Demuestre que ambos espacios, X e Y , son normados.
- Demuestre que X es Banach, es decir, que las sucesiones de Cauchy convergen y que la convergencia al límite es **uniforme** en $t \in [0, 1]$.
- Pruebe que Y no es completo.
- Demuestre que $C_{[0,1]} \subset \mathcal{L}_{[0,1]}^1$, en que $\mathcal{L}_{[0,1]}^1$ es el espacio Y completado, es decir, el espacio de las funciones absolutamente integrables en $[0, 1]$.

Problema 3.3 Considere el espacio

$$X = \mathcal{L}_{[-1,1]}^2 = \left\{ f(t) \in \mathbb{R}, t \in [-1, 1] : \int_{-1}^1 |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

y el (sub)espacio

$$S = \text{span}\{1, t, t^2\}$$

Dada la función $x(t) = \sin(\pi t - \frac{\pi}{3})$,

- Determine y grafique la mejor aproximación de $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_2$, es decir, en la norma inducida por el producto interno usual en $\mathcal{L}_{[-1,1]}^2$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

- Determine y grafique la mejor aproximación $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_1$, es decir,

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t)| dt$$

- Determine y grafique la mejor aproximación $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_\infty$, es decir,

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$$

- Repita los tres puntos anteriores si ahora se consideran las mejores aproximaciones en el (sub)espacio

$$\tilde{S} = S \oplus \{t^3\}$$