Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2015
Examen

Problema 1 *Considere los siguientes conjuntos:*

H: *espacios de Hilbert,*	M: *espacios métricos,*
B: *espacios de Banach,*	N: *espacios normados,*
C: *espacios completos,*	P: *espacios con producto interno,*
T: *espacios topológicos,*	V: *espacios vectoriales.*

Haga un sólo diagrama indicando la contención o intersección de dichos conjuntos, fundamentando claramente su respuesta.

Problema 2 (20 puntos) *Considere la función $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d(x,y) = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$$

en que $p \in \mathbb{R}$. Determine si d satisface las propiedades de norma en el conjunto $\mathbb{R}^2$.

Problema 3 (20 puntos) *Sea $F(z) = \dfrac{z}{z-a}$, tal que $|a| \neq 1$ y $\Phi(z) = F(z)F(z^{-1})$. Usando el teorema del residuo, determine $r[k] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(e^{j\theta})e^{j\theta k}d\theta$, en que $k \in \mathbb{Z}$.*

Problema 4 (20 puntos) *Considere un conjunto de puntos/datos $\{x_i, y_i\} \in \mathbb{R}^2$, en que $i = 1, \ldots, N$.*

a) *Es posible hacer regresión lineal para ajustar $y = mx + b$ de manera de minimizar*

$$S_1(m,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - (mx_i - b))^2$$

Exprese el problema como uno de cuadrados mínimos y obtenga su solución m_{LS}, b_{LS}.

b) *Otra posibilidad es ajustar una recta $y = nx + c$ a los datos dados, pero de manera de minimizar*

$$S_2(n,c) = \sum_{i=1}^{N} d_i^2$$

en que d_i es la distancia entre el punto (x_i, y_i) y la recta $y = nx + c$. Haga un esquema que muestre el problema y obtenga su solución.

Problema 5 (20 puntos) *Sea $T : H_1 \to H_2$ un operador lineal y acotado entre dos espacios de Hilbert H_1 y H_2. Se define*

$$\text{Rango de } T\text{: } \mathscr{R}(T) = \{y \in H_2 : \text{ existe } x \in H_1 \text{ talque } y = Tx\}$$
$$\text{Espacio nulo de } T\text{: } \mathscr{N}(T) = \{x \in H_1 : Tx = 0\}$$

a) *Demuestre que $\mathscr{R}(T)$ es un subespacio de H_2 y que $\mathscr{N}(T)$ es un subespacio de H_1.*

b) *Demuestre que $\mathscr{N}(T^*)$ es el complemento ortogonal de $\mathscr{R}(T)$, en que T^* es el operador adjunto de T.*

JYE – 22 de enero de 2016