IPD410 - Métodos Matemáticos en Control Automático – S2 2015
Tarea #1. Variable Compleja

Plazo de entrega: Lunes 19 de octubre

Problema 1.1 *Sea $k \in \mathbb{Z}$ y $f(z) = \dfrac{z^k(z+2)}{(z-1)}$ una función de la variable compleja $z \in \mathbb{C}$.*

1. *Determine los puntos del plano complejo extendido en que $f(z)$ es analítica.*
2. *Determine los residuos de $f(z)$ en sus polos y en $z = \infty$.*
3. *Calcule la integral*
$$I = \oint_{\gamma_R} f(z)dz$$
en que γ_R es un circulo de radio $R > 0$.

Problema 1.2 *Considere la señal $f(t) = e^{\alpha t}$, $t \in \mathbb{R}$ en que $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante.*

1. *Determine la transformada de Laplace de $f(t)$, $F(s)$ y su región de convergencia en el plano $s \in \mathbb{C}$.*
2. *Determine la transformada de Laplace inversa de $F(s)$, es decir, $\tilde{f}(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, y compárela con la señal $f(t)$ original.*
3. *Si se define $G(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$, entonces determine la transformada de Fourier inversa de $G(j\omega)$, es decir, una señal $g(t)$.*
4. *Discuta los resultados obtenidos y qué relación existe entre $f(t)$, $\tilde{f}(t)$ y $g(t)$.*

Problema 1.3 *Sea $G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ una función racional en la variable $s \in \mathbb{C}$. Sea $H(s) = \log G(s)$ en que* log *es la rama principal de la función logaritmo compleja.*

1. *Determine en qué puntos del plano complejo la función $H(s)$ es analítica.*
2. *Determine $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \log|G(j\omega)|d\omega$.*

Sugerencia*: revise la demostración del Teorema Integral de Bode, por ejemplo, en el libro Serón, M., Braslavsky, J. & Goodwin, G.C., 1997. Fundamental limitations in filtering and control, Springer Verlag.*

Problema 1.4 *Considere el conjunto $\mathscr{H}$ de las funciones $H(z)$ racionales y con coeficientes reales de una variable compleja $z \in \mathbb{C}$. Se define el producto interno como:*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \quad & \mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (H_1(z), H_2(z)) \longrightarrow & \langle H_1(z), H_2(z) \rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H_1(z) H_2(z^{-1}) z^{-1} dz \end{aligned}$$

Considere además las dos secuencias $h_1[k] = a^{-k}$ y $h_2[k] = a^k$ en que $0 < a < 1$ y $k \in \mathbb{Z}_0^+$ y sus respectivas transformadas $\mathscr{Z}$, es decir, $H_1(z)$ y $H_2(z)$.

1. *Determine $H_1(z)$, $H_2(z)$ y sus respectivas regiones de convergencia.*
2. *Determine $\|H_1(z)\|^2 = \langle H_1(z), H_1(z) \rangle$, $\|H_2(z)\|^2 = \langle H_2(z), H_2(z) \rangle$, y $\langle H_1(z), H_2(z) \rangle$*

JYE – 16 de septiembre de 2015