Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2015
Tarea #2.

Problema 2.1 *Sea $\mathscr{V}$ un espacio vectorial de dimensión $n < \infty$ y $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ un subconjunto l.i. de dicho espacio. Dado un vector $v \in \mathscr{V}$, determine bajo qué condiciones la proyección de v sobre el (sub)espacio generado por S es igual a la suma de sus proyecciones sobre los elementos de S, es decir,*

$$\operatorname{proy}_{\operatorname{Span} S} v = \operatorname{proy}_{s_1} v + \ldots + \operatorname{proy}_{s_k} v$$

Problema 2.2 *Dada una secuencia discreta $\{y_0, \ldots, y_{N-1}\}$, la transformada de Fourier discreta se define como*

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_d : \mathbb{R}^N &\mapsto \mathbb{C}^N \\ y_k &\mapsto Y_\ell = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} y_k (z_\ell)^{-k} \end{aligned} \tag{1}$$

donde $z_\ell = e^{j\frac{2\pi}{N}\ell}$, $\ell = 0, \ldots, N-1$.

- *Demuestre que dicha transformación es lineal y determine la matriz M_F asociada a la transformación.*
- *¿Qué propiedades satisface la matriz de transformación M_F? (simétrica, ortogonal, unitaria, hermitiana, etc...)*
- *Determine la matriz de transformación inversa.*
- *Determine los cuatro subespacios asociados a la transformación (espacio fila, columna, nulo y nulo izquierdo). En particular, discuta si $\mathbb{C}^N$ debe ser considerado como un espacio vectorial complejo de dimensión N o real de dimensión $2N$.*

Problema 2.3 *Considere la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, de rango $r < \min\{m,n\}$y sea su descomposicion en valores singulares*

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_r & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right] \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}^T$$

*donde $\Sigma_r = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ **Demuestre** que:*

1. *Las columnas de U_1 definen una **base** para el espacio columna de A.*
2. *Las columnas de V_2 definen una **base** para el espacio nulo de A.*

Problema 2.4 *Considere el sistema de ecuaciones $Ax = c$ en que*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

en que todos los coeficientes son números reales. Suponga $c \notin C(A)$ (el espacio columna de A) y que $\text{rango}(A) = 2$.

¿Es posible interpretar geométricamente la solución obtenida por mínimos cuadrados

$$x_{LS} = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - c\|_2$$

en el plano $x_1 - x_2$ al que pertenecen las tres rectas definidas por $Ax = c$ y (2)?

Problema 2.5 *Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$, en que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ son **dados**, y la incógnita es el vector $x \in \mathbb{R}^n$. Si $n > m$ el sistema se dice* sub-determinado *y existen, en general, infinitas soluciones. En este caso se utiliza algún* criterio *para elegir la **mejor** solución.*

- *Para ilustrar esta idea, proponga un ejemplo en que $n = 2$ y $m = 1$, y determine la solución de $Ax = b$ tal que*
  1. *Se minimiza $\|x\|_1 = \sum |x_i|$*
  2. *Se minimiza $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$*
  3. *Se minimiza $\|x\|_\infty = \lim_{n \to \infty} (\sum |x_i|^n)^{1/n} = \max_i \{|x_i|\}$*
- *Interprete geométricamente en $\mathbb{R}^2$.*