Métodos Matemáticos en Control Automático. II Semestre 2015
Tarea #3: Espacios normados, Banach y Hilbert.

Problema 3.1 *Considere el espacio $X = C_{[0,1]}$, es decir, el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ con la norma*

$$\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$$

Considere además el espacio Y como el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, pero con la norma

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|dt$$

a) *Demuestre que X es Banach, es decir, que las sucesiones de Cauchy convergen y que la convergencia al límite es* ***uniforme*** *en $t \in [0,1]$.*

b) *Pruebe que Y no es completo.*

Problema 3.2 *Considere el espacio*

$$X = \mathscr{L}^2_{[-1,1]} = \left\{ f(t) \in \mathbb{R}, t \in [-1,1] : \int_{-1}^1 |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

y el (sub)espacio

$$S = \operatorname{span}\{1, t, t^2\}$$

Dada la función $x(t) = \sin(\pi t - \frac{\pi}{3})$,

a) *Determine y grafique la mejor aproximación de $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_2$, es decir, en la norma inducida por el producto interno usual en $\mathscr{L}^2_{[-1,1]}$:*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$$

b) *Determine y grafique la mejor aproximación $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_1$, es decir,*

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t)|dt$$

c) *Determine y grafique la mejor aproximación $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_\infty$, es decir,*

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[-1,1]} |f(t)|$$

d) *Repita los tres puntos anteriores si ahora se consideran las mejores aproximaciones en el (sub)espacio*

$$\tilde{S} = S \oplus \{t^3\}$$

JYE – 17 de diciembre de 2015