Métodos Matemáticos en Control Automático - S1 2019
Examen Final

Problema 4.1 *Considere los siguientes conjuntos:*

H: espacios de Hilbert,	*M: espacios métricos,*
B: espacios de Banach,	*N: espacios normados,*
C: espacios completos,	*P: espacios con producto interno,*
T: espacios topológicos,	*V: espacios vectoriales.*

*Haga un sólo diagrama indicando la contención o intersección de dichos conjuntos, **fundamentando claramente su respuesta**.*

Problema 4.2 *Sea $F(z) = \dfrac{z}{z-a}$, tal que $|a| \neq 1$ y $\Phi(z) = F(z)F(z^{-1})$. Usando el teorema del residuo, determine $r[k] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(e^{j\theta})e^{j\theta k}d\theta$, en que $k \in \mathbb{Z}$.*

Problema 4.3 *Considere la función definida en toda la recta real por*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & ; x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & ; x \notin [0,1) \end{cases}$$

Considere el conjunto de funciones que se obtiene por escalamientos y traslaciones de dicha función: $S = \{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)\}$, en que $j,k \in \mathbb{Z}$. Note, por ejemplo, que $\phi(x) = \phi_{0,0}(x)$.

Demuestre que S es un conjunto ortonormal en el espacio $\mathscr{L}_2(\mathbb{R})$.

Problema 4.4 *Considere el operador*

$$\begin{aligned} G: \quad \mathscr{L}^2_{[0,1]} \quad &\to \quad \mathscr{L}^2_{[0,1]} \\ f(t) \quad &\to \quad g(t) = Gf(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Determine las funciones singulares $\{f, g\}$ y los valores singulares σ asociados a G, es decir:

$$Gf = \sigma g$$
$$G^* g = \sigma f$$

en que G^* es el operador adjunto asociado a G.

Problema 4.5 *. Determine la función estacionaria $u = u(x)$ para el funcional*

$$I(u) = \int_1^2 [u'\,(1 + x^2\,u')]dx$$

con condiciones de borde $u(1) = 0$ y $u(2) = 1$.

¿Es dicha función un mínimo o un máximo para el funcional?

JYE – 25 de julio de 2019