

IPD410 - Métodos Matemáticos en Control Automático – S1 2019

Tarea #1. Variable Compleja

Problema 1.1 Usando las definiciones de transformada de Laplace y Transformada de Laplace Inversa, demuestre que

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-(t-1)}\mu(t-1) \iff F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-s}}{s+1}$$

Problema 1.2 Sea $k \in \mathbb{Z}$ y $f(z) = \frac{z^k(z+2)}{(z-1)}$ una función de la variable compleja $z \in \mathbb{C}$.

1. Determine los puntos del plano complejo extendido en que $f(z)$ es analítica.
2. Determine los residuos de $f(z)$ en sus polos y en $z = \infty$.
3. Calcule la integral

$$I = \oint_{\gamma_R} f(z) dz$$

en que γ_R es un círculo de radio $R > 0$.

Problema 1.3 Considere el conjunto \mathcal{H} de las funciones $H(z)$ racionales y con coeficientes reales de una variable compleja $z \in \mathbb{C}$. Se define el producto interno como:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(H_1(z), H_2(z)) \longrightarrow \langle H_1(z), H_2(z) \rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H_1(z) H_2(z^{-1}) z^{-1} dz$$

Considere además las dos secuencias $h_1[k] = a^{-k}$ y $h_2[k] = a^k$ en que $0 < a < 1$ y $k \in \mathbb{Z}_0^+$ y sus respectivas transformadas \mathcal{Z} , es decir, $H_1(z)$ y $H_2(z)$.

1. Determine $H_1(z)$, $H_2(z)$ y sus respectivas regiones de convergencia.
2. Si se define $G_1(e^{j\theta}) = H_1(z)|_{z=e^{j\theta}}$ y $G_2(e^{j\theta}) = H_2(z)|_{z=e^{j\theta}}$, determine su transformada de Fourier de tiempo discreto inversa, es decir

$$g_\ell[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_\ell(e^{j\theta}) e^{jk\theta} d\theta \quad \ell = 1, 2$$

y compárelas con las secuencias originales $h_\ell[k]$ respectivas.

3. Determine $\|H_1(z)\|^2 = \langle H_1(z), H_1(z) \rangle$, $\|H_2(z)\|^2 = \langle H_2(z), H_2(z) \rangle$, y $\langle H_1(z), H_2(z) \rangle$