

Métodos Matemáticos en Control Automático. I Semestre 2019

Tarea #3: Espacios normados, Banach y Hilbert.

Problema 3.1 Demuestre que un subespacio \mathcal{M} de un espacio métrico \mathcal{X} es completo si y sólo si \mathcal{M} es cerrado en \mathcal{X} .

Problema 3.2 .

- a) Encuentre un ejemplo de una señal en $\mathcal{L}^1_{[0,1]}$, pero que no pertenezca a $\mathcal{L}^2_{[0,1]}$.
- b) Encuentre un ejemplo de una señal en $\mathcal{L}^2_{[0,\infty)}$, pero que no pertenezca a $\mathcal{L}^1_{[0,\infty)}$.
-

Problema 3.3 Considere el espacio

$$X = \mathcal{L}^2_{[-1,1]} = \left\{ f(t) \in \mathbb{R}, t \in [-1, 1] : \int_{-1}^1 |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

y el (sub)espacio

$$S = \text{span}\{1, t, t^2\}$$

Dada la función $x(t) = \cos(\pi t + \frac{\pi}{4})$,

- a) Determine y grafique la mejor aproximación de $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_2$, es decir, en la norma inducida por el producto interno usual en $\mathcal{L}^2_{[-1,1]}$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$$

- b) Determine y grafique la mejor aproximación $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_1$, es decir,

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t)|dt$$

- c) Determine y grafique la mejor aproximación $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_\infty$, es decir,

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$$