Métodos Matemáticos en Control Automático
Examen Final - Semestre 1, 2020

Problema 1 *Considere los siguientes conjuntos:*

H: *espacios de Hilbert,*	M: *espacios métricos,*
B: *espacios de Banach,*	N: *espacios normados,*
C: *espacios completos,*	P: *espacios con producto interno,*
T: *espacios topológicos,*	V: *espacios vectoriales.*

Haga un sólo diagrama indicando la contención o intersección de dichos conjuntos, ***fundamentando claramente su respuesta****.*

Problema 2 *Sea* (X,d) *un espacio métrico y sea* $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *una función. Suponga que* h *es una función creciente y que* $h(x+y)\le h(x)+h(y)$ *para todo* $x,y\in X$ *¿Qué otras condiciones debe satisfacer* h *para que*

$$D(x,y)=h(d(x,y)),\quad x,y\in X$$

sea una métrica para X*?*

Problema 3 *Considere la función compleja*

$$f(z)=\frac{z-10}{z^2+az+1}.$$

Determine todos los valores de $a\in\mathbb{R}$ *que cumplen con*

$$\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz,$$

donde $C_1=\{z\in\mathbb{C}:|z|=2\}$ *y* $C_2=\{z\in\mathbb{C}:|z-1|=1\}$ *son recorridos en sentido positivo.*

Problema 4 *Considere un conjunto de puntos/datos* $\{x_i, y_i\} \in \mathbb{R}^2$, *en que* $i = 1, \ldots, N$.

1. *Es posible hacer regresión lineal para ajustar* $y = mx + b$ *de manera de minimizar*
$$S_1(m,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - (mx_i - b))^2$$
Exprese el problema como uno de cuadrados mínimos y obtenga su solución m_{LS}, b_{LS}.

2. *Otra posibilidad es ajustar una recta* $y = nx + c$ *a los datos dados, pero de manera de minimizar*
$$S_2(n,c) = \sum_{i=1}^{N} d_i^2$$
en que d_i *es la distancia entre el punto* (x_i, y_i) *y la recta* $y = nx + c$. *Haga un esquema que muestre el problema y obtenga su solución.*

Problema 5 *Sea* $T : H_1 \to H_2$ *un operador lineal y acotado entre dos espacios de Hilbert* H_1 *y* H_2. *Se define*

Rango de T: $\mathscr{R}(T) = \{y \in H_2 : \text{ existe } x \in H_1 \text{ talque } y = Tx\}$

Espacio nulo de T: $\mathscr{N}(T) = \{x \in H_1 : Tx = 0\}$

Se define el operador adjunto de T *como:* $T^* : H_2 \to H_1$, *talque* $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$.

1. *Demuestre que* $\mathscr{R}(T)$ *es un subespacio de* H_2 *y que* $\mathscr{N}(T)$ *es un subespacio de* H_1.

2. *Demuestre que* $\mathscr{N}(T^*)$ *es el complemento ortogonal de* $\mathscr{R}(T)$, *en que* T^* *es el operador adjunto de* T.

JYE - 16 de agosto de 2020