

# Métodos Matemáticos en Control Automático

## I Semestre 2020

### Tarea #0

---

**Problema 0.1** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , tal que  $a < b$  y el intervalo  $I = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ .

- Determine si el intervalo  $I$  es un conjunto abierto o cerrado.
- Determine (si existe) el mínimo, el máximo, el ínfimo y el supremo del intervalo  $I$ .

---

**Problema 0.2** Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $R_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (|x|^n + |y|^n)^{1/n} = 1\}$ .

- Haga un diagrama de  $R_n$  para  $n = 1$ ,  $n = 2$  y cuando  $n \rightarrow \infty$ .

---

**Problema 0.3** Dado el sistema de ecuaciones

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad (2)$$

$$a_3x + b_3y = c_3 \quad (3)$$

en que  $a_\ell, b_\ell, c_\ell \in \mathbb{R}$ , para  $\ell \in \{1, 2, 3\}$ .

- Determine bajo qué condiciones el sistema tiene solución única, infinitas soluciones, o no tiene solución. ¿Cómo es posible interpretar dichas condiciones geoméricamente?

---

**Problema 0.4** Sea  $z = z(t) \in \mathbb{C}$  y  $x = \operatorname{Re}\{z\}$  e  $y = \operatorname{Im}\{z\}$ . Considere la función  $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ , tal que  $f(z) = 1/z$ .

- Determine  $\frac{df}{dz}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{df}{dt}$ .
- Determine y haga un diagrama de la imagen bajo la función  $f$  de la curva  $\zeta = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ .

---

**Problema 0.5** Sea  $f(t) = e^{-\alpha t} \mu(t)$  en que  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\mu(t)$  es el escalón unitario o función de Heaviside.

- Determine para qué valores de  $\alpha$  la transformada de Laplace  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  existe y cuál es su región de convergencia (es decir, para qué valores de  $s \in \mathbb{C}$  el par transformada y transformada inversa está bien definido).
- Determine para qué valores de  $\alpha$  la transformada de Fourier  $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  existe ¿Existe una región de convergencia para dicha transformada?

---

**Problema 0.6** Sea  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\begin{aligned} x(t) &= T \langle x_o, u(t) \rangle \\ &= e^{A(t-t_o)} x_o + \int_{t_o}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4)$$

en que  $t \geq t_o$ ,  $x_o \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ .

- Demuestre que  $T \langle \cdot, \cdot \rangle$  es un operador lineal en ambas componentes.
- Demuestre que  $x(t)$  definido en (4) es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad ; x(t_o) = x_o \quad (5)$$

---

**Problema 0.7** Considere los siguientes tres vectores en  $\mathbb{R}^3$ :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

- Demuestre que los vectores dados son linealmente independientes.
  - Dado un vector  $v = [\alpha, \beta, \gamma]^T \in \mathbb{R}^3$ , determine su expresión como combinación lineal de los vectores dados ¿Forman  $\{v_1, v_2, v_3\}$  un base para  $\mathbb{R}^3$ ?
  - Determine si los vectores dados son ortogonales entre si.
  - A partir de los vectores dados, determine una base ortonormal  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ , usando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.
  - Determine la matriz de transformación de la representación en términos de la base  $\{v_1, v_2, v_3\}$  a la representación en términos de la base  $\mathcal{B}$ .
- 

**Problema 0.8** Los polinomios de Euler-Fröbenius aparecen en modelos muestreados de sistemas lineales invariantes en el tiempo:

$$B_n(z) = b_1^n z^{n-1} + b_2^n z^{n-2} + \dots + b_{n-1}^n z + b_n^n \quad (7)$$

$$b_k^n = \sum_{\ell=1}^k (-1)^{k-\ell} \ell^n \binom{n+1}{k-\ell} \quad (8)$$

en que  $n \in \mathbb{N}$

- Determine explícitamente  $B_1(z)$ ,  $B_2(z)$  y  $B_3(z)$ .
- Demuestre que
  1.  $b_1^n = b_n^n = 1$
  2.  $b_k^n = k b_k^{n-1} + (n-k+1) b_{k-1}^{n-1}$  (calculo recursivo de los coeficientes)
  3.  $b_k^n = b_{n+1-k}^n$  (simetría de los coeficientes)
  4.  $B_n(z_0) = 0 \iff B_n(1/z_0) = 0$  (simetría de las raíces)
  5.  $B_{n+1}(z) = z(1-z)B_n'(z) + (nz+1)B_n(z)$  en que  $B_n'(z) = \frac{dB_n(z)}{dz}$  (calculo recursivo de los polinomios)