IPD410 - Métodos Matemáticos en Control Automático – S1 2020
Tarea #1. Variable Compleja

Problema 1.1 *Considere una función racional* $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$*, en que* $s \in \mathbb{C}$*.*

- *Determine en qué puntos del plano complejo* $\mathbb{C}$ *la función* $H(s)$ *es continua, diferenciable o analítica.*
- *¿Es posible extender "adecuadamente"* $H(s)$ *de manera que sea continua, diferenciable o analitica en todo el plano complejo extendido* $\mathbb{C}_e = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *?*
- *Determine en qué puntos del plano complejo* $\mathbb{C}$ *la función* $\operatorname{Log} H(s)$ *es continua, diferenciable o analítica, en que* Log *es la rama principal de la función logaritmo compleja.*

Problema 1.2 *Considere la señal* $f[k] = \alpha^k$ *definida en tiempo discreto* $k \in \mathbb{Z}$ *en que* $\alpha \in \mathbb{R}$ *es una constante.*

1. *Determine la transformada Zeta* $F(z)$ *de* $f[k]$*,* $F(s)$ *y su región de convergencia en el plano* $z \in \mathbb{C}$*.*
2. *Determine (por definición) la transformada Zeta inversa de* $F(z)$*, es decir,* $\tilde{f}(t) = \mathscr{Z}^{-1}\{F(s)\}$*, y compárela con la señal* $f(t)$ *original.*
3. *Si se define* $G(e^{j\theta}) = F(z)|_{z=e^{j\theta}}$*, entonces determine la transformada de Fourier de tiempo discreto inversa de* $G(e^{j\theta})$*, es decir, una señal* $g(t)$ *y compárela con la señal* $f(t)$ *original.*

(Use las definiciones de transformadas en el texto Análisis de Sistemas Lineales*, Salgado, Yuz & Rojas.* `http://profesores.elo.utfsm.cl/~jyuz/ASL.html` *)*

Problema 1.3 *Considere el conjunto de funciones racionales de la forma* $F_\ell(s) = \dfrac{k_\ell}{s - p_\ell}$ *en que* $s \in \mathbb{C}$ *y* $k_\ell, p_\ell \in \mathbb{R}$*, y el producto interno*

$$\langle F_\ell(s), F_m(s) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_m(-j\omega) F_\ell(j\omega) d\omega$$

1. *Determine* $\|F_\ell(s)\| = \sqrt{\langle F_\ell(s), F_\ell(s) \rangle}$*, es decir, la norma inducida por el producto interno.*
2. *Determine bajo qué condiciones* $F_\ell(s) \perp F_m(s) \iff \langle F_\ell(s), F_m(s) \rangle = 0$

JYE – 6 de mayo de 2020