

Métodos Matemáticos en Control Automático. S1 - 2020

Tarea #2.

Problema 2.1 Sea \mathcal{V} un espacio vectorial de dimensión $n < \infty$ y $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ un subconjunto l.i. de dicho espacio. Dado un vector $v \in \mathcal{V}$, determine bajo qué condiciones la proyección de v sobre el (sub)espacio generado por S es igual a la suma de sus proyecciones sobre los elementos de S , es decir,

$$\text{proy}_{\text{Span} S} v = \text{proy}_{s_1} v + \dots + \text{proy}_{s_k} v$$

Problema 2.2 Dada una secuencia discreta $\{y_0, \dots, y_{N-1}\} \in \mathbb{R}^N$, la transformada de Fourier discreta se define como

$$Y_\ell = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} y_k (z_\ell)^{-k}$$

donde $z_\ell = e^{j\frac{2\pi}{N}\ell}$, $\ell = 0, \dots, N-1$. Determine la matriz M_F asociada a la transformación y qué propiedades satisface (simétrica, ortogonal, unitaria, hermitiana, etc.).

Problema 2.3 Considere la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de rango $r < \min\{m, n\}$ y sea su descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V^T$. Demuestre que dicha descomposición permite obtener una base para cada uno de los cuatro subespacios fundamentales asociados a A .

Problema 2.4 Considere el sistema de ecuaciones $Ax = c$ en que

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

en que todos los coeficientes son números reales. Suponga $c \notin C(A)$ (el espacio columna de A) y que $\text{rango}(A) = 2$. ¿Es posible interpretar geoméricamente la solución obtenida por mínimos cuadrados

$$x_{LS} = \text{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - c\|_2$$

en el plano $x_1 - x_2$ al que pertenecen las tres rectas definidas por $Ax = c$?

Problema 2.5 Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$, en que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ son **dados**, y la incógnita es el vector $x \in \mathbb{R}^n$. Si $n > m$ el sistema se dice sub-determinado y existen, en general, infinitas soluciones. En este caso se utiliza algún criterio para elegir la **mejor** solución.

- Para ilustrar esta idea, proponga un ejemplo en que $n = 2$ y $m = 1$, y determine la solución de $Ax = b$ tal que
 1. Se minimiza $\|x\|_1 = \sum |x_i|$
 2. Se minimiza $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$
 3. Se minimiza $\|x\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum |x_i|^n)^{1/n} = \max_i \{|x_i|\}$
- Interprete geoméricamente en \mathbb{R}^2 .

Problema 2.6 Se define la norma-2 de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ como

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

en que $\|\cdot\|_2$ es la norma vectorial Euclideana o norma-2. Demuestre que $\|A\|_2 = \bar{\sigma}(A)$, en que $\bar{\sigma}(A)$ es el máximo valor singular de la matriz A .