Métodos Matemáticos en Control Automático. I Semestre 2020
Tarea #3: Análisis Funcional

Problema 3.1 *Considere el espacio métrico (X,d) en que*

$$X = \{f = f(x), x \in [-\pi,\pi] : f(x) \text{ es continua}\}$$
$$d = d(f,g) = \sup_{x\in(-\pi,\pi)} |f(x) - g(x)|$$

Determine si la siguiente secuencia ξ es o no convergente en dicho espacio

$$\{\xi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\sin((2k-1)x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Problema 3.2 *Demuestre que un subespacio $\mathscr{M}$ de un espacio métrico $\mathscr{X}$ es completo si y sólo si $\mathscr{M}$ es cerrado en $\mathscr{X}$.*

Problema 3.3 *Dados dos espacios normados reales $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Considere el espacio $B(X,Y)$ de todos los operadores lineales $T : X \longrightarrow Y$.*

a) Demuestre que $B(X,Y)$ tiene la estructura de espacio vectorial

b) Demuestre que $B(X,Y)$ es un espacio normado con la norma:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|_X \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

Problema 3.4 *Considere el espacio*

$$X = \mathscr{L}^2_{[-1,1]} = \left\{f(t) \in \mathbb{R}, t \in [-1,1] : \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt < \infty\right\}$$

y el (sub)espacio

$$S = \operatorname{span}\{1, t, t^2\}$$

Dada la función $x(t) = \cos(\pi t + \frac{\pi}{4})$,

a) Determine y grafique la mejor aproximación de $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_2$, es decir, en la norma inducida por el producto interno usual en $\mathscr{L}^2_{[-1,1]}$:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

b) Determine y grafique la mejor aproximación $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_1$, es decir,

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|dt$$

c) Determine y grafique la mejor aproximación $x(t)$ en S en norma $\|\cdot\|_\infty$, es decir,

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[-1,1]} |f(t)|$$

JYE – 29 de junio de 2020