

Métodos Matemáticos en Control Automático

Examen Final - Semestre 2, 2020

Problema 1 Considere los siguientes conjuntos:

H : espacios de Hilbert,
 B : espacios de Banach,
 C : espacios completos,
 T : espacios topológicos,

M : espacios métricos,
 N : espacios normados,
 P : espacios con producto interno,
 V : espacios vectoriales.

Haga un sólo diagrama indicando la contención o intersección de dichos conjuntos, **fundamentando claramente su respuesta**.

Problema 2 Considere el conjunto de funciones racionales de la forma $F_\ell(s) = \frac{k_\ell}{s - p_\ell}$ en que $s \in \mathbb{C}$ y $k_\ell, p_\ell \in \mathbb{R}$, y el producto interno

$$\langle F_\ell(s), F_m(s) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_m(-j\omega) F_\ell(j\omega) d\omega$$

Determine bajo qué condiciones $F_\ell(s) \perp F_m(s)$.

Problema 3 Se define la norma-2 de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ como

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

en que $\|\cdot\|_2$ es la norma vectorial Euclídeana o norma-2. Demuestre que $\|A\|_2 = \bar{\sigma}(A)$, en que $\bar{\sigma}(A)$ es el máximo valor singular de la matriz A .

Problema 4 Sea (X, d) un espacio métrico y sea $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Suponga que h es una función creciente y que $h(x+y) \leq h(x) + h(y)$ para todo $x, y \in X$. ¿Qué otras condiciones debe satisfacer h para que

$$D(x, y) = h(d(x, y)), \quad x, y \in X$$

sea una métrica para X ?

Problema 5 Considere el espacio vectorial

$$X = \{f = f(t), t \in [-\pi, \pi] : f(t) \in \mathbb{R}, f(t) \text{ es acotada}\}$$

y la siguiente secuencia en dicho espacio

$$\{S_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)t) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

1. Determine si la secuencia es convergente **puntualmente** (es decir, para cada valor de $t \in [-\pi, \pi]$).
2. Determine si la secuencia es convergente en la métrica inducida por la norma de \mathcal{L}_2 en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
3. Determine si la secuencia es convergente en la métrica inducida por la norma \mathcal{L}_∞ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Problema 6 Determine la función estacionaria $u = u(x)$ para el funcional

$$I(u) = \int_1^2 [u'(1+x^2 u')] dx$$

con condiciones de borde $u(1) = 0$ y $u(2) = 1$. ¿Es dicha función un mínimo o un máximo para el funcional?

JYE - 9 de enero de 2021