Métodos Matemáticos en Control Automático, S2 2020
Tarea #0

Problema 0.1 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $a < b$ y el intervalo $I = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.*

- *Determine si el intervalo I es un conjunto abierto o cerrado.*
- *Determine (si existe) el mínimo, el máximo, el ínfimo y el supremo del intervalo I.*

Problema 0.2 *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $R_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (|x|^n + |y|^n)^{1/n} = 1\}$.*

- *Haga un diagrama de R_n para $n = 1$, $n = 2$ y cuando $n \to \infty$.*

Problema 0.3 *Dado el sistema de ecuaciones*

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \tag{1}$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2 \tag{2}$$
$$a_3 x + b_3 y = c_3 \tag{3}$$

en que $a_\ell, b_\ell, c_\ell \in \mathbb{R}$, para $\ell \in \{1,2,3\}$.

- *Determine bajo qué condiciones el sistema tiene solución única, infinitas soluciones, o no tiene solución. ¿Cómo es posible interpretar dichas condiciones geométricamente?*

Problema 0.4 *Sea $z = z(t) \in \mathbb{C}$ y $x = \mathrm{Re}\{z\}$ e $y = \mathrm{Im}\{z\}$. Considere la función $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, tal que $f(z) = 1/z$.*

- *Determine $\frac{df}{dz}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{df}{dt}$.*
- *Determine y haga un diagrama de la imagen bajo la función f de la curva $\zeta = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$.*

Problema 0.5 *Sea $f(t) = e^{-\alpha t}\mu(t)$ en que $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mu(t)$ es el escalón unitario o función de Heaviside.*

- *Determine para qué valores de α la transformada de Laplace $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe y cuál es su región de convergencia (es decir, para qué valores de $s \in \mathbb{C}$ el par transformada y transformada inversa está bien definido).*
- *Determine para qué valores de α la transformada de Fourier $F(j\omega) = \mathscr{F}\{f(t)\}$ existe ¿Existe una región de convergencia para dicha transformada?*

Problema 0.6 *Sea $x(t) \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\begin{aligned} x(t) &= T < x_o, u(t) > \\ &= e^{A(t-t_o)}x_o + \int_{t_o}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{4}$$

en que $t \geq t_o$, $x_o \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times n_u}$.

- *Demuestre que $T < \cdot, \cdot >$ es un operador lineal en ambas componentes.*
- *Demuestre que $x(t)$ definido en (4) es solución de la ecuación diferencial*

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad ; x(t_o) = x_o \tag{5}$$

Problema 0.7 *Considere los siguientes tres vectores en $\mathbb{R}^3$:*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

- *Demuestre que los vectores dados son linealmente independientes.*
- *Dado un vector $v = [\alpha, \beta, \gamma]^T \in \mathbb{R}^3$, determine su expresión como combinación lineal de los vectores dados ¿Forman $\{v_1, v_2, v_3\}$ un base para $\mathbb{R}^3$?*
- *Determine si los vectores dados son ortogonales entre si.*
- *A partir de los vectores dados, determine una base ortonormal $\mathscr{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, usando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.*
- *Determine la matriz de transformación de la representación en terminos de la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ a la representación en términos de la base $\mathscr{B}$.*

Problema 0.8 *Los polinomios de Euler-Fröbenius aparecen en modelos muestreados de sistemas lineales invariantes en el tiempo:*

$$B_n(z) = b_1^n z^{n-1} + b_2^n z^{n-2} + \ldots + b_{n-1}^n z + b_n^n \tag{7}$$

$$b_k^n = \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{k-\ell} \ell^n \binom{n+1}{k-\ell} \tag{8}$$

en que $n \in \mathbb{N}$

- *Determine explícitamente $B_1(z)$, $B_2(z)$ y $B_3(z)$.*
- *Demuestre que*
  1. $b_1^n = b_n^n = 1$
  2. $b_k^n = k b_k^{n-1} + (n-k+1) b_{k-1}^{n-1}$ *(calculo recursivo de los coeficientes)*
  3. $b_k^n = b_{n+1-k}^n$ *(simetría de los coeficientes)*
  4. $B_n(z_o) = 0 \iff B_n(1/z_o) = 0$ *(simetría de las raíces)*
  5. $B_{n+1}(z) = z(1-z)B_n'(z) + (nz+1)B_n(z)$ *en que* $B_n'(z) = \dfrac{d\,B_n(z)}{dz}$ *(calculo recursivo de los polinomios)*

JYE – 8 de septiembre de 2020