

IPD410 - Métodos Matemáticos en Control Automático – S2 2020  
Tarea #1. Variable Compleja

---

**Problema 1.1** Considere una función racional  $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ , en que  $s \in \mathbb{C}$ .

- Determine en qué puntos del plano complejo  $\mathbb{C}$  la función  $H(s)$  es continua, diferenciable o analítica.
  - ¿Es posible extender “adecuadamente”  $H(s)$  de manera que sea continua, diferenciable o analítica en todo el plano complejo extendido  $\mathbb{C}_e = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ?
  - Determine en qué puntos del plano complejo  $\mathbb{C}$  la función  $\text{Log}H(s)$  es continua, diferenciable o analítica, en que  $\text{Log}$  es la rama principal de la función logaritmo compleja.
- 

**Problema 1.2** Considere la función compleja

$$f(z) = \frac{z - 10}{z^2 + az + 1}.$$

Determine todos los valores de  $a \in \mathbb{R}$  que cumplen con

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz,$$

donde  $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$  y  $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$  son recorridos en sentido positivo.

---

**Problema 1.3** Considere la señal  $f[k] = \alpha^k$  definida en tiempo discreto  $k \in \mathbb{Z}$  en que  $\alpha \in \mathbb{R}$  es una constante.

1. Determine la transformada Zeta de  $f[k]$ ,  $F(z)$  y su región de convergencia en el plano  $z \in \mathbb{C}$ .
  2. Determine (por definición) la transformada Zeta inversa de  $F(z)$ , es decir,  $\tilde{f}[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$ , y compárela con la señal  $f[k]$  original.
  3. Si se define  $G(e^{j\theta}) = F(z)|_{z=e^{j\theta}}$ , entonces determine la transformada de Fourier de tiempo discreto inversa de  $G(e^{j\theta})$ , es decir, una señal  $g[k]$  y compárela con la señal  $f[k]$  original.
  4. Si  $\Phi(z) = F(z)F(z^{-1})$ , usando el teorema del residuo determine  $r[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(e^{j\theta}) e^{j\theta k} d\theta$ , en que  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 

**Problema 1.4** Usando las definiciones de transformada de Laplace y Transformada de Laplace Inversa, demuestre que

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-(t-1)}\mu(t-1) \iff F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-s}}{s+1}$$

Sugerencia: Use la definición de transformadas en *Análisis de Sistemas Lineales*, Salgado, Yuz & Rojas.  
<http://profesores.elo.utfsm.cl/~jyuz/ASL.html>

JYE – 27 de septiembre de 2020