Métodos Matemáticos en Control Automático. S2 - 2020
Tarea #2.

Problema 2.1 *Considere la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, de rango $r < \min\{m,n\}$y sea su descomposicion en valores singulares*

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_r & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right] \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}^T$$

donde $\Sigma_r = \operatorname{diag}\{\sigma_1,\ldots,\sigma_r\}$ *Demuestre que*

(a) *Las columnas de U_1 definen una **base** para el espacio columna de A.*

(b) *Las columnas de V_2 definen una **base** para el espacio nulo de A.*

Problema 2.2 *Dada una secuencia discreta $\{y_0,\ldots,y_{N-1}\}$, la transformada de Fourier discreta se define como*

$$Y_\ell = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} y_k (z_\ell)^{-k}$$

donde $z_\ell = e^{j\frac{2\pi}{N}\ell}$, $\ell = 0,\ldots,N-1$.

(a) *Determine la matriz M_F asociada a la transformación.*

(b) *Determine qué propiedades satisface (simétrica, ortogonal, unitaria, hermitiana, etc.).*

(c) *Determine los cuatro subespacios asociados a la transformación (espacio fila, columna, nulo y nulo izquierdo). En particular, discuta si $\mathbb{C}^N$ debe ser considerado como un espacio vectorial complejo de dimensión N o real de dimensión $2N$.*

Problema 2.3 *Sea L_n una matriz cuadrada de $n\times n$ dada por:*

$$L_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(a) *Calcule* $\det(L_n)$.

(b) *Compruebe que L_n satisface la ecuación de Lyapunov:*

$$L_n - AL_nA^\top = BB^T \tag{2}$$

donde B es un vector columna de $n\times 1$ con cada elemento igual a 1 y A es una matriz de $n\times n$ con $A_{i,j} = 1$ si $j = i-1$ y $A_{i,j} = 0$ en todo otro caso.

(c) Demuestre que

$$L_c = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^\top (A^\top)^k,$$

es una solución general de (2) y que L_n definido en (1) se puede obtener usando L_c para los A y B dados.

(d) ¿Qué condiciones deben satisfacer A y B para que L_c sea solución de (2)?

(e) Considere $c > 1$ y las matrices (con las mismas dimensiones que en los puntos anteriores)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Obtenga L_n.